ONTÚSTIK-QAZAQSTAN MEDISINA AKADEMIASY
«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ

SOUTH KAZAKHSTAN MEDICAL ACADEMY
АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»

Медицинский колледж при
АО «Южно-Казахстанской медицинской академии»

Кафедра общеобразовательных дисциплин

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Код дисциплины: ООД 05
Дисциплина: Математика
Специальность: 09120100 «Лечебное дело»
Квалификация: 4S09120101 «Фельдшер»
Специальность: 09130100 «Сестринское дело»
Квалификация: 4S09130103 «Медицинская сестра общей практики»
Специальность: 09110100 «Стоматология»
Квалификация: 4S09110102 «Дантист»
Специальность: 09110200 «Ортопедическая стоматология»
Квалификация: 4S09110201 «Зубной техник»
Курс: 1
Семестр: 1
Форма контролья: экзамен
Обьем учебных часов / кредитов: 144/6
Самостоятельная работа студента: 24
Самостоятельная работа студента с педагогом:12
Теоретическое: 108

Шымкент, 2025 г.

Обсуждено на заседании кафедры общеобразовательных дисциплин

Протокол № 1 от «27» 08 2025 г.

Заведующий кафедрой ____________ Сатаев А.Т.

Занятие № 1

1.1. Тема занятия: Функция, ее свойства и графики.

Количество часов:2 **90 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся способам передачи функции, преобразования графиков функций используемые в технико-технологическом процессе.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Функция и способы ее задания.
- Преобразования графиков функций.
- Способы построения графика функции.

Объяснение новой темы: 27 мин

Функция и способы ее задания. Преобразования графиков функций. используемые в технико-технологическом процессе.

Определение: Числовой функцией f называется соответствие двух множеств D и E, где$D\in R$, $E\in R$, при котором каждому элементу $x\in D$ соответствует единственный элемент $f(x)\in E$. Множество D называется областью определения функции, а множеством E множеством значений функции. Обозначаются D(f) и E(f). Для задания функци необходимо и достаточно задать закон соответствия f, по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и область определения D(f).

Способы задания функции:

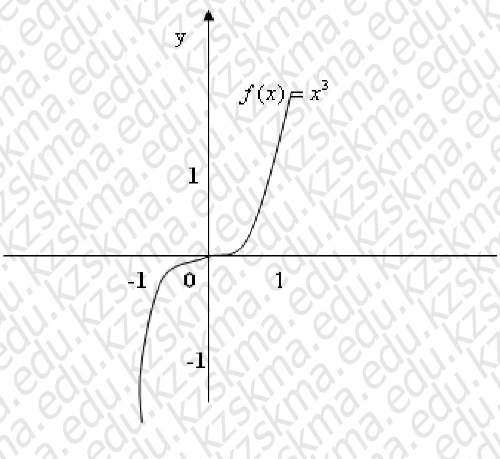
Формулой.Если задаётся множество действии с аргументом x, по которой можно вычислить значение функции, то говорят,что функция задана формулой.

$y = x^2 - 5x + 40$ или $y = x^2$.

Таблицей: Распределение соответствующих значении функции к значениям аргумента с помощью таблицы называется табличным способом задания функции. тот способ часто применяется в метереологии.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	6	8	10

Графиком : Графиком функции f называют множество всех точек (x,y) координатой



плоскости**.**

Простые преобразования графиков функций. Понятие обратной функции. Сложная функция.

Определение 1. Функция y=f(x) называется **возрастающей,** если для любых двух значений x_1,x_2 из области определения функции из тогочто $x_1<x_2$.следует, что $f(x_1) < f(x_2)$

Из этого определения следует, что для любых двух точек графика возрастающей функции правая лежит выше левой (разумеется, при том условии, что координатная система выбирается обычным способом: ось Ох- горизонтальна, с отсчетом слева направо, а осьОу- вертикальна, с отсчетом снизу вверх). Так, например, на рис. 1 изображен график возрастающей функции.

Определение 2. Функция y=f(x) называется **убывающей,** если для любых двух значений x_1,x_2 из области определения функции из тогочто $x_1<x_2$.следует, что $f(x_1)> f(x_2)$

Определение 3. Как возрастающие, так и убывающие, функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает,- **промежутками монотонности.**

Определение 4. Функция называются строго монотонными, если она возрастающая или убывающая.

Существуют функции, не принадлежащие ни к одной из определенного нами выше класса функций.Так, например, функция $y=x^2$ не удовлетворяет ни одному из выше указанных определений. Это, пример так называемой кусочно- монотонной функций. Она определена на множестве **R** действительных чисел, т. е. D(y)= **R.** Из ее графика следует, что в интервале

$(-\infty; 0)$ убывающая, а в интервале $(0; +\infty)$ возрастающая.

Рассмотрим функции, области определения котрых симетричны относительно начала координат, т.е. вместе с произвольным числом *x* область определения содержит и число (-*x*). Да таких функций определены понятия чесности и нечетности.

Функция *f* называется **четной,** если для любого x из ее области определения *f(-x)=f(x)*.
Функция *f* нечетна, если для любого x из области определения *f(-x)=-f(x)*.

Пример. Функция $f(-x)=x^4$ четная, а функция $g(x)=x^3$ нечетная. Действительно, область определения каждой из них (это вся числовая прямая) симметрична относительно точки О и для любого x аыполнены расенства

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),\ g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x).$$

Пример. Функция $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$ четная, так ее область определения симметрична относительно начала координат (оно состойт из всех чисел, обличных от -1, 0 и 1) и для всех x ε D (f) выполнено расенство

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^3-(-x)}=\frac{-x^3-x}{x-x^3}=\frac{x^3+x}{x^3-x}=f(x).$$

График этой функции симметричен относительно оси Оу.

Определение. Функцию *f* называют **периодической** с периодом $T\neq0$, если для любого x их области определения *f* значения этой функции в точках x и x+T равны, т.е.

$$f(x+T)=f(x).$$

С примерами периодических фнкций вы уже знакомы. Поскольку sin(x+2π)=sin x и cos (x+2π)=cos x для любого действительного x, синус и косинус –периодические функции с периодом 2π. Тангенс и котангенс – периодические функции с периодом π, так как tg(x+π)=tgx и ctg(x+π)=ctg x.

Очевидно, что если функция f – периодическая с периодом T, то при любом целом n≠0 число nT тоже период этой функции. Например, при n=3, воспользовавшись несколько раз определением периодической фнкции, находим:

Обратная функция.

Определение. Функцию g, которая в каждой точке x области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что f(y)=x, называют **обратной** к функции f.

Пример 1. Докажем, что функция $f(x)=x^3$ обратима, и выведем формулу, задаюшую функцию y=g(x), обратную к f.

По определению обратной функции сначала надо доказать, $f(x)=x^3$ что уравнение f(y)=x при любом значении x имеет единственное решение y. В данном случае это уравнение таково:

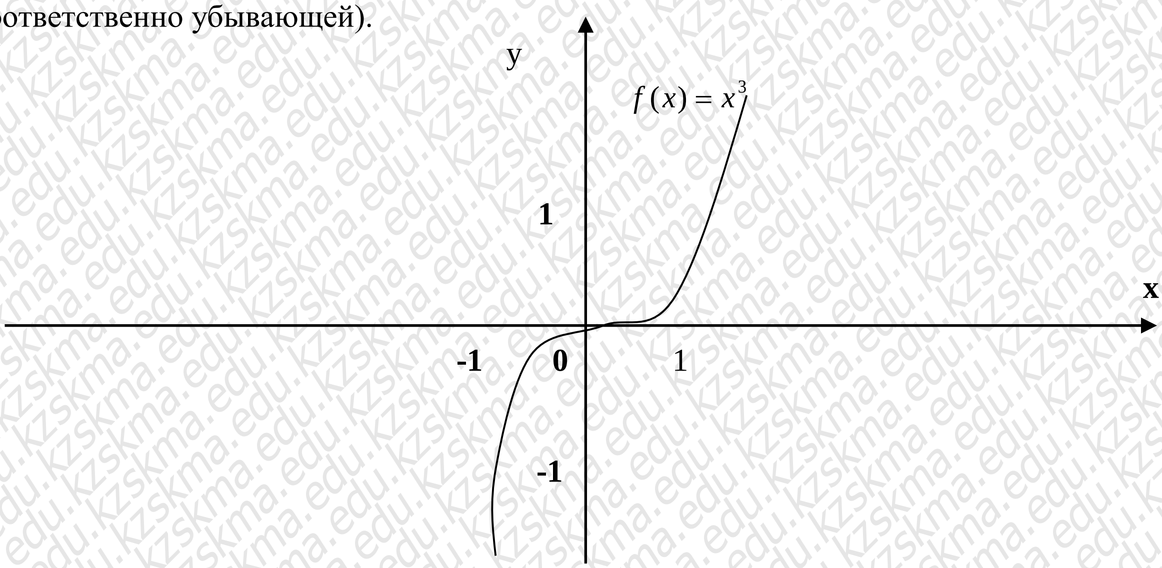
$y^3=x$.

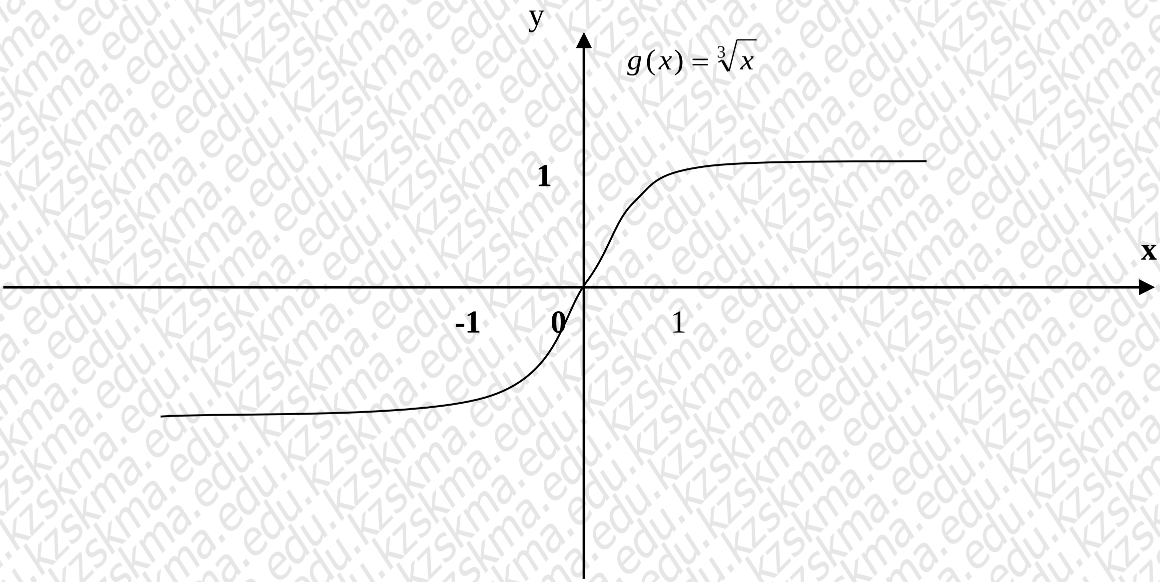
Оно имеет единственное решение $y=\sqrt[3]{x}$ при любом x. Поэтому функция $f(x)=x^3$ обратима и обратной к ней является функция

$$g(x)=\sqrt[3]{x}$$

График функции g, обратной к функции f, симметричен графику f относительно прямой y=x.

Теорема. Если функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, то она обратима. Обратная к f функция g, определенная в области значений f, также является возрастающей (соответственно убывающей).





1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Что такое функция?
- y=x+1 – это какая функция?
- y=x^2 графики функции какими кривыми является?
- Какие способы задания функции?
- Как определить множеством значений и областью определения функции.

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

1. y=x^2 и y=x^3. графики функции.
2. y=2-x, y=x^2+1 графики функции.
3. y= 2x+3,y=$(x-3)^2$ графики функции.

1. $f(x) = 3x^2 + x^4$
2. $f(x) = x^5 \sin \frac{x}{2}$
3. $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$
4. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = x^3 \sin x^2$
6. $f(x) = x^2(2x - x^3)$
7. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^3}$
8. $f(x) = 4x^6 - x^2$
9. $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$
11. $f(x) = \frac{2\sin \frac{x}{2}}{x^3}$
12. $f(x) = x^5 \cos x$
13. $f(x) = x(5 - x^2)$
14. $f(x) = \frac{3x}{x^6 + 2}$
15. $f(x) = 3\cos 4x$
16. $f(x) = x^2 \cos x$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 2

1.1. Тема занятия: Тригонометрические функции и их графики.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся тригонометрические функции, их свойства и графики.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.

- Определение целей и задач занятия .

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Свойства тригонометрических функции.
- Тригонометрические функции.
- Способы построения графика функции.

Объяснение новой темы: 40 мин

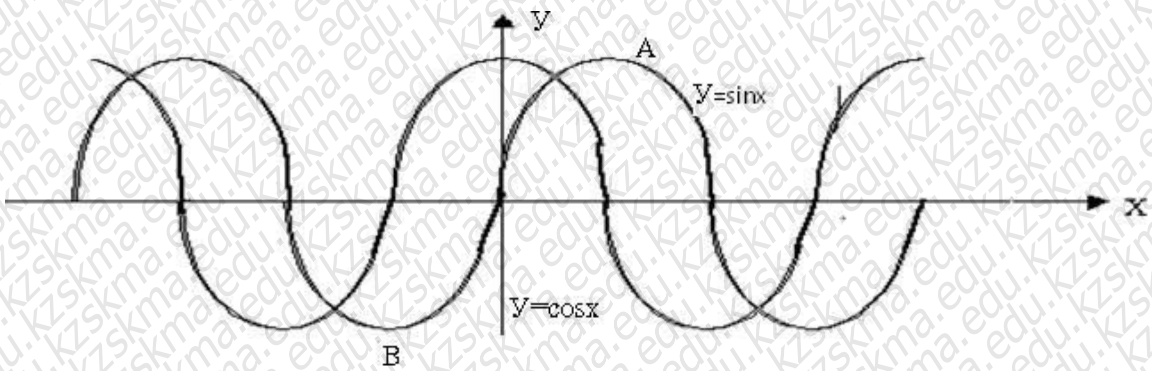
Тригонометрические функции, их свойства и графики.

<u>Определение</u>:Функции y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx называются тригонометрическими функциями.

Исследуем тригонометрическую функцию $y = \sin x$ **:**

1. D(y). x $\in]-\infty;+\infty[$
2. E (y). $[-1;1]$
3. $\sin(-x) = -\sin x$ –нечетная функция.
4. $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ периодическая . T=2π

X	**0**	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	**0**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



Исследуем тригонометрическую функцию $y = \cos x$.

1) $D(y) = R$ $x \in]-\infty;+\infty[$
2) $E(y)$ $[-1;1]$ – *ограниченн ая.*
3) $\cos(-x) = \cos x$ *четная.*
4) $\sin(x \pm 2\pi) = \cos x$ *периодичес кая* : $T = 2\pi$.
5) $y = \cos x$ - непрерывна на всей числовой прямой.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
tgx	0	1	3	-	0

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
ctgx	-	1	3 3	0	–

Исследуем тригонометрическую функцию $y = tgx$:

1) $D(y) \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

2) $E(y) \quad]-\infty;+\infty[$

3) $tg(-x) = -tgx$ *нечетная.*

4) $tg(x \pm \pi) = tgx$ *периодичес кая* $: T = \pi.$

5) Имеет точки разрыва, где не имеет смысла. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in Z$.

6) $x = \pi k; \quad k \in Z.$

7) tgx *– строго возрастает* . $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right[$

IV. Исследуем тригонометрическую функцию $y = ctgx$.

1) $D(y) \quad x \neq \pi k,\ k \in Z$

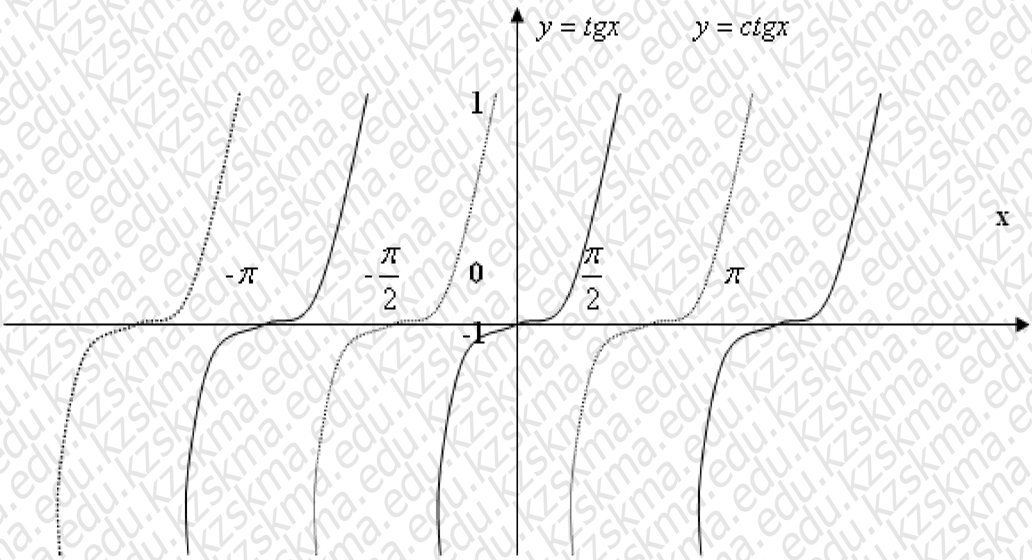
2) $E(y) \quad]-\infty;+\infty[$

3) $ctg(-x) = -ctgx$ *нечетная.*

4) $ctg(x \pm \pi) = ctgx$ *периодичес кая* $: T = \pi.$

5) Имеет точки разрыва, где не имеет смысла. $x = \pi k;\ k \in Z$.

6) строго убывает



1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Какие функции называются тригонометрическими функциями?
- Какие свойства функции y=sin x?
- Какие свойства функции y=cos x?
- Какие свойства функции y=tg x?
- Какие свойства функции y=ctg x?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

1. $y=x^2$ и $y=x^3$. графики функции.

2. $y=2-x$, $y=x^2+1$ графики функции.
3. $y= 2x+3$, $y=(x-3)^2$ графики функции.

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 3

1.1. Тема занятия: Построение графиков тригонометрических функций с помощью преобразований.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся способами преобразования графиков функций.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

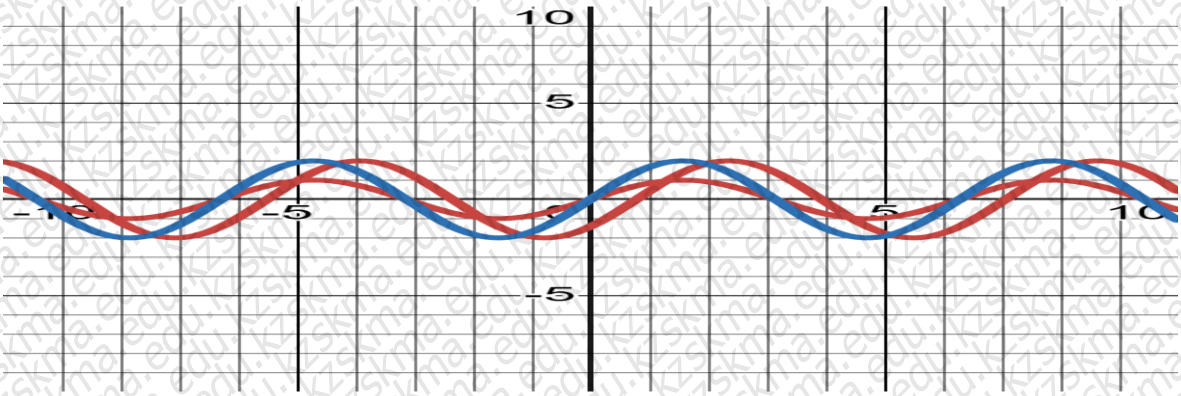
1.4. Основные задачи темы:

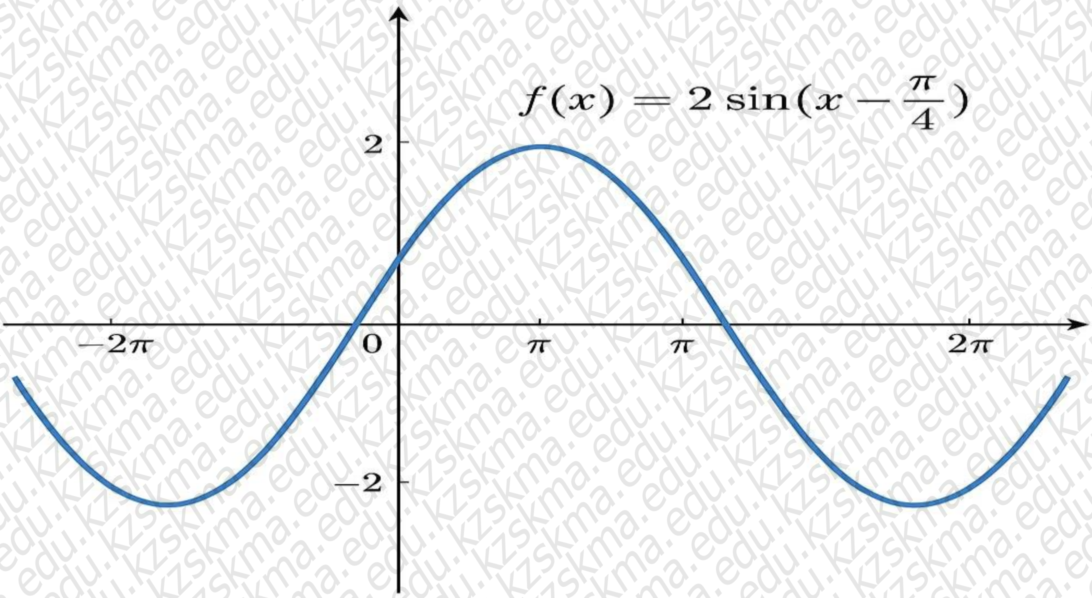
- Функция и способы ее задания.
- Преобразования графиков функций.
- Способы построения графика функции.

Объяснение новой темы: 40 мин

Построение графиков тригонометрических функций с помощью преобразований.

$F(x)= 2\sin(x-\frac{\pi}{4})$ преобразования тригонометрических функций.





$f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Когда мы строим график функции с помощью простых преобразований?
- В чем особенность построения графиков функций путем преобразования?
- Будет ли сходство в преобразовании графов функций для построения графиков функций?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Постройте график тригонометрических функций с помощью преобразований

1. $y = \sin x + 1$ 2. $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$ 3. $y = -4\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 4

1.1. Тема занятия: Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Количество часов:2 **90 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся способам передачи функции, преобразования графиков функций используемые в технико-технологическом процессе.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Функция и способы ее задания.
- Преобразования графиков функций.
- Способы построения графика функции.

Объяснение новой темы: 27 мин

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

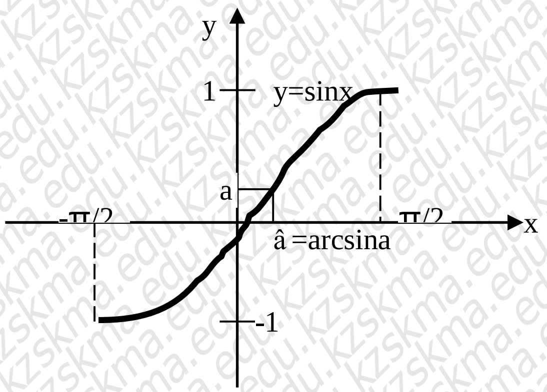
Определение. *Арксинусом* числа m называется такой угол x, для которго sinx=m, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $|m| \le 1$.

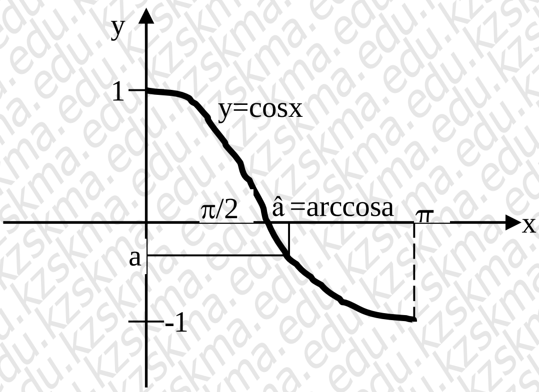
Определение. *Аркосинусом* числа m называется такой угол x, для которго cosx=m, $0 \le x \le \pi$, $|m| \le 1$.

Определение. *Арктангенсом* числа m называется такой угол x, для которго tgx=m, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Определение. *Арккотангенсом* числа m называется такой угол x, для которго ctgx=m, $0 < x < \pi$.

Графики обратных тригонометрических функци





При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, если $|x| \le 1$

б) $\sin(\arcsin x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

в) $\cos(\arccos x) = x$, если $-1 \le x \le 1$

г) $\arcsin(\sin x) = x$, когда $|x| \le \frac{\pi}{2}$

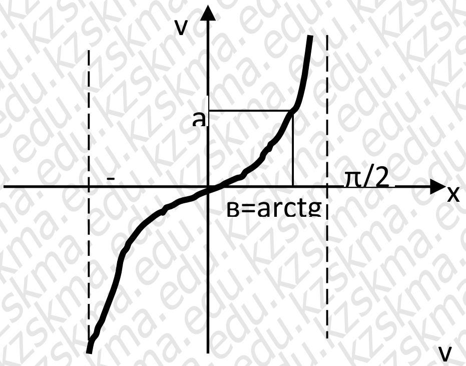
д) $\arccos(\cos x) = x$, когда $0 \le x \le \pi$

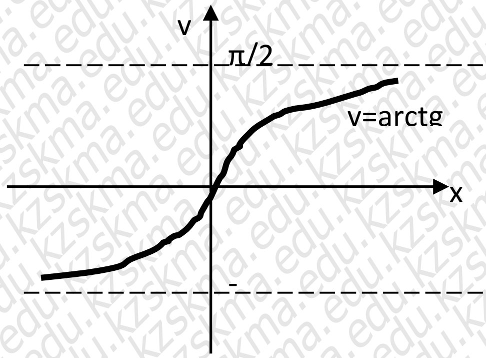
Функция y=arcsinx является нечетной, т.е. arcsin(-x)=- arcsinx.

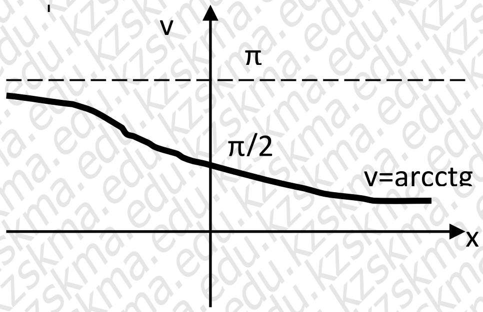
Функция y=arccosx не является ни четной, ни нечетной.

При всех допустимых значениях аргумента х справедливы тождества:

а) $arctg\,(tgx) = x,$ если $|x| < \frac{\pi}{2}$







б) $tg(arctgx\ ) = x,$ для любого действительного х

в) $ctg(arcctg\ ) = x,$ для любого действительного х

г) $arcctgx\ + arctgx\ = \frac{\pi}{2}$

д) $arcctg\,(ctgx) = x,$ если $0 < x < \pi$

Функция у=arctgx является нечетной, т.е. arctg(-x)=- arctgx.
Функция у=arcctgx не является ни четной, ни нечетной.

График функции у=arctgx имеет две асимптоты: $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

График функции у=arcctgx имеет две асимптоты: $y = 0$ и $y = \pi$.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Какие функии относятся к обратным тригонометрическим функциям?
- Определение и график арксинуса.
- Определение и гарфик арккосинуса.
- Определение и график арктангенса.
- Определение и график арккотангенса.

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Вычислите:

1) $\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right);$ 2) $\arccos\left(-1/2\right);$

3) $arctg\,\left(-\sqrt{3}/3\right);$ 4) $arcctg\,(-1);$

5) $arcctg\,\left(-\sqrt{3}\right);$ 6) $\arcsin\left(\sqrt{2}/2\right) + \arccos\left(\sqrt{2}/2\right);$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 5

1.1. Тема занятия: Простейшие тригонометрические уравнения.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся с методами решения тригонометрических уравнений.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Функция и способы ее задания.
- Преобразования графиков функций.
- Способы построения графика функции.

Объяснение новой темы: 40 мин

Методы решения простые тригонометрические уравнения.

Рассмотрим уравнения:

а) $\sin x = 1$ пересечение графиков функций y=sinx и y=1.

Это точки пересечения : $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$б) \sin x = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\qquad \sin x = m \qquad x = (-1)^n \arcsin m + \pi k, \qquad k \in Z$

$в) \sin x = 0 \qquad x = \pi k, \quad k \in Z$

Рассмотрим уравнения:

а) $\cos x = 1$ пересечение графиков функций y=cosx и y=1.

Это точки пересечения : $x = \pi k, \quad k \in Z$

$б) \cos x = -1 \qquad x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

$в) \cos x = 0 \qquad x = 2\pi k,\ k \in Z$

$\cos x = m \qquad x = \pm \arccos im + 2\pi k, \qquad k \in Z$ (2)

$tgx = m \qquad x = arctgm + \pi k, \qquad k \in Z$ (3)

$ctgx = m \qquad x = arcctgm + \pi k, \qquad k \in Z$ (4)

Преподаватель совместно с учащимися решает следующие уравнения:

1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z;$

2) $\cos^2 x = \frac{3}{4}, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$

3) $tg^2 x = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{tg}\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$

Рассмотрим решение сложных уравнений.

1) $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$ - приводим к квадратному $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ и sinx=y, тогда:

$y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad D = 16, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 3$

$\sin x = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$

2) $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$ - решить самостоятельно.

3) $tg^3 x = tgx$ - путем вынесения за скобки

$tgx\left(tg^2 x - 1\right) = 0, \qquad tgx = 0, \qquad x = \pi k, \quad k \in Z$

$tg^2 x = 1, \qquad tgx = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$

4) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$ - путем приведения к одной функции.

$2\left(1 - \sin^2 x\right) = 3\sin x + 2$

$2 - 2\sin^2 x = 3\sin x + 2$

$2 - 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \qquad \sin x(2\sin x + 3) = 0$

$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in Z$

$2\sin x + 3 = 0, \quad \sin x = -\frac{3}{2}$ - нет решения

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что такое системы уравнения?
- Что такое решение системы уравнений?
- В чем отличие решение уравнений от системы уравнений?
- Когда уравнения образует систему уравнению?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Решите уравнение:

1. sin(-6x)- sin(-4x)=0
2. cos(-5x)+cos 3x=0
3. sin15x+ sin7x=0
4. 3sin^{2}x- cos^{2}x=0
5. 3sin^{2}x+4 cos^{2}x-13sinx* cosx =0

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 6

1.1. Тема занятия: Методы решения тригонометрических уравнений и систем. Решение тригонометрических неравенств и их систем.

Количество часов: 3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся с методами решения тригонометрических уравнений и системы уравнений.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Методы решение уравнений.
- Преобразования графиков функций.

Объяснение новой темы: 40 мин

Методы решения тригонометрических уравнений и систем.

При решении систем тригонометрических уравнений мы используем те же методы, что и в алгебре (замены, подстановки, исключения и т. д.), а также известные методы и формулы тригонометрии. Обычно при решении тригонометрических систем последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, или к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов. Рассмотрим некоторые примеры.
Может случиться, что одно из уравнений системы содержит тригонометрические функции от неизвестных x и y, а другое уравнение является линейным относительно x и y. В таком случае действуем очевидным образом: одну из неизвестных выражаем из линейного уравнения и подставляем в другое уравнение системы.

Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y \equiv 1 \\ \sin^2 x - cos^2 y \equiv 1 \end{cases}$$

Решение. Замена u = sin x, v = cos y приводит к алгебраической системе относительно u и v: (u + v = 1, u 2 − v 2 = 1. Эту систему вы без труда решите самостоятельно.

Решение единственно: u = 1, v = 0. Обратная замена приводит к двум простейшим тригонометрическим уравнениям: (sin x = 1, cos y = 0, откуда x = π 2 + 2πk, y = π 2 + πn (k, n ∈ Z). Ответ: π 2 + 2πk; π 2 + πn , k, n ∈ Z. Теперь в записи ответа фигурируют два целочисленных параметра k и n. Отличие от предыдущих задач состоит в том, что в данной системе отсутствует «жёсткая» связь между x и y (например, в виде линейного уравнения), поэтому x и y в гораздо большей степени независимы друг от друга. 2 В данном случае было бы ошибкой использовать лишь один целочисленный параметр n, записав ответ в виде π 2 + 2πn; π 2 + πn . Это привело бы к потере бесконечного множества решений системы. Например, потерялось бы решение 5π 2 ; π 2 , возникающее при k = 1 и n = 0

Решение тригонометрических неравенств и их систем.

Формула тригонометрических неравенств.

$\sin x \ge a, (|a| \le 1) \Leftrightarrow x \in [\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n], n \in Z$

$\sin x \le a, (|a| \le 1) \Leftrightarrow x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n], n \in Z$

$\cos x \ge a, (|a| \le 1) \Leftrightarrow x \in [-\arccos a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n], n \in Z$

$\cos x \le a, (|a| \le 1) \Leftrightarrow x \in [\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arcsin a + 2\pi n], n \in Z$

$tgx \ge a, (a \in R) \Leftrightarrow x \in \left[arctga + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in Z$

$tgx \le a, (a \in R) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, arctga + \pi n \right], n \in Z$

$ctgx \ge a, (a \in R) \Leftrightarrow x \in [\pi n, arcctga + \pi n], n \in Z$

$ctgx \le a, (a \in R) \Leftrightarrow x \in [arcctga + \pi n, \pi n], n \in Z$

$\sin x \le \alpha, \sin x \ge \alpha, \sin x < \alpha, \sin x > a$

$\cos x \le a, \cos x \ge a, \cos x < a, \cos x > a$

$tgx \le a, tgx \ge a, tgx < a, tgx > a$

$ctgx \le a, ctgx \ge a, ctgx < a, ctgx > a$

1-пример. Решим неравенство: Sint<1/2 (1)

Для всех t удовлетворяюших данному неравенству ординаты радиус векторов единичной окружности должны быть меньше одной второй.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что такое системы уравнения?
- Что такое решение системы уравнений?
- В чем отличие решение уравнений от системы уравнений?
- Когда уравнения образует систему уравнению?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Решите системы уравнений: 1. 2.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y \equiv 1{,}5 \\ \sin^2 x - \cos^2 y \equiv 1{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \cdot \cos y \equiv \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{ctg} x \cdot ctgy \equiv -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №7

1.1. Тема занятия: Степени и корни.

Количество часов:2 90 мин

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся находить степени с действительным показателем и преобразовывать выражения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Степени и корни.
- Корень n-ой степени и его свойства.
- Преобразование иррациональных выражений.

Объяснение новой темы: 27 мин

Корень n-ой степени и его свойства. Преобразование иррациональных выражений.

Определение: степень действительного числа a с действительным показателем x есть произведение x сомножителей, каждый из которых равен a: a^1=a; a^2=aŁa; $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, где a – основание степени, x – показатель степени.

õ ðàç

Правила: а) $(a,b,c)^x = a^x Ł b^x Ł c^x$; б) $(a/b)^x = a^x/b^x$.

Действия со степенями:

1) $a^x Ł a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x/a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{xy}$;

4) $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$; 5) $(a)^0 = 1$; 6) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Произвести указанные действия:

№ 98 $7a^3b^{-1}Ł2ab^3 = 14a^4b^2$; № 100 $x^{-2}/x^2 = x^{-4} = 1/x^4$; № 103 $(2a^2b^{-3})^3 = 8a^6b^{-9}$;

№ 111 а) $1/a^3 = a^{-3}$; б) $1/3 = 3^{-1}$; в) $2/a^2b = 2a^{-2}b^{-1}$.

№ 120 Вычислить: $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-3}$.

Решение: Выполним последовательно действия:

1. $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{10}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2. $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3} = \frac{216}{125}$;

3. $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$; 4. $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{6}\right)^{3} = \frac{125}{216}$.

4. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{216}{125} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{125}{216} = 0$, т.о. Ответ: 0

№ 121 Вычислить: $0{,}5^{0} \cdot \left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0,25} \cdot (0{,}36)^{-0,5} \cdot (0{,}1)^{-2}$.

Решение: 1) $0{,}5^{0} = 1$; 2) $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0,25} = \left(\frac{6}{5}\right)^{1} = \frac{6}{5}$; 3)

$(0{,}36)^{-0,5} = \left[(0{,}6)^{2}\right]^{-0,5} = (0{,}6)^{-1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

4) $(0{,}1)^{-2} = 10^{2} = 100$. Подставив найденные значения, получим: $1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot 100 = 200$.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Что такое степень?
- Какие свойствы степени есть?
- Что называется степень числа с действительным показателем?
- Какие методы есть при решения в степени рационалного показателя?
- Какие методы есть при решения в степени натурального показателя

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Решение задач:

1. $3^{-4} \cdot 3^{6}$
2. $2^{4} \cdot 2^{-3}$
3. $10^{8} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}$
4. $2^{10} : 2^{12}$
5. $5^{-3} : 5^{-3}$
6. $5^{-15} \cdot 5^{16}$
10. $3^{-4} : 3$
11. $\left(2^{-4}\right)^{-1}$
12. $\left(5^{2}\right)^{-2} \cdot 5^{3}$
13. $3^{-4} \cdot \left(3^{-2}\right)^{-4}$
14. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

7. $4^{-8} : 4^{-9}$

8. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4$

9. $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$

15. $16^{\frac{5}{4}}$

16. $9^{-2} : 3^{-6}$

17. $81^3 : \left(9^{-2}\right)^{-3}$

Вычислите.

а) $0{,}2a^{-2}b^{-4} \cdot 5a^3b^{-3}$, если *a=-0,125, b=8*

б) $\frac{1}{27}a^{-1}b^{-5} \cdot 81a^2b^4$, если *a=1/7, b=1/14*

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №8

1.1. Тема занятия: Степени с рациональными показателями.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся находить степени с действительным показателем и преобразовывать выражения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Степени и корни.
- Степень с рациональным показателем.
- Преобразование выражений.

Объяснение новой темы: 40 мин

Степень с рациональным показателем. Преобразование выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

Напомним, что каждое рациональное число можно записать в виде дроби , где знаменатель натуральное число, а числитель целое число.

1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример**:** $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Пример $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$

3. $a^n \div a^m = a^{n-m}$

Пример: $7^{\frac{2}{3}} \div 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

4. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ Пример: $(5^2)^3 - (5^3)^4 = 5^6 - 5^{12} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Пример: $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{2^2}{5^2} + \frac{1^3}{5^3} = \frac{4}{25} + \frac{1}{125} = \frac{20+1}{125} = \frac{21}{125}$

6. $a^0 = 1$ Пример: $5^0 = 1$ $50^0 = 1$ $1000^0 = 1$

7. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ Пример: $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$ $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Какие значения принимают числа внутри корневого символа?
- Является ли корень n-й степени каждый раз из любого действительного числа?
- В каких случаях удобнее использовать способы преобразования иррациональных выражений?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Вычислите:

1. $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$ 2 $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} \div \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$ 3 $\sqrt[5]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}}$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №9

1.1. Тема занятия: Иррациональные уравнения и системы.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся находить степени с действительным показателем и преобразовывать выражения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Иррациональные уравнения и их системы
- Методы решения иррациональных уравнений.

Объяснение новой темы: 40 мин

Иррациональные уравнения и их системы. Методы решения иррациональных уравнений.

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.
Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие методы:

- «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;
- введение новой переменной;
- сведение к системе уравнений;
- применение свойств функций, входящих в уравнение.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).
При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1. если показатель корня – четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным (определение корня с четным показателем степени);
2. если показатель корня – нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

Пример: $\sqrt{x+2}=x$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2 \Rightarrow x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=\sqrt{9}=3$$

$$x_1=\frac{-(-1)-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-1)+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

1) Решите уравнение: $\sqrt[3]{7-3x}=\sqrt[3]{-3-x}$.

Решение: $7-3x=-3-x$;

$-2x=-10$;

$x=5$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Какие уравнения могут быть выведены при решении иррационального уравнения?
- Почему при решении иррациональных уравнений внимание уделяется области определения иррационального выражения?
- Что такое иррациональная система уравнений?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Решайте уравнения и системы уравнений

1. $\sqrt{x} = 3$ 2. $\sqrt{x-3} = 2$ 3. $\sqrt[3]{x+2} = 3$

$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ xy = 27 \end{cases}$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №10

1.1. Тема занятия: Иррациональные неравенства и методы решения их систем.

Количество часов:2 90 мин

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучить обучающихся методы решения иррациональных неравенств.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Извлечение корня из произведения.
- Извлечение корня из дроби.
- Сокращение показателя выражения.
- Возведение корня в степень.
- Извлечение корня из корня.

Объяснение новой темы: 27 мин

Иррациональные неравенства. Иррациональные неравенства и методы их решений.

Неравенство, содержащее неизвестные величины или некоторые функции неизвестных величин под знаком радикала, называется **иррациональным неравенством**.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод возведения в степень. При этом решение таких неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств. Такого рода преобразования могут привести к неравенствам, которые не равносильны исходному, и поскольку множество решений в большинстве случаев представляет бесконечное множество, невозможно провести проверку полученных решений подстановкой. Единственный способ, который гарантирует правильный ответ, состоит в применении исключительно равносильных преобразований неравенств.

Пример: $\sqrt{2x^2-5x+11} \geq 3$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+11 \geq 0 \\ 2x^2-5x+11 \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+11 \geq 0 \\ 2x^2-5x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

1. $2x^2-5x+11=0$
$D=25-88=-63$

2. $2x^2-5x+2=0$
$D=25-16=9$
$x_1=0.5.x_2=2$

$$\begin{cases} x \in R \\ (-\infty;0.5] \cup [2;+\infty) \end{cases}$$

Пример: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x+y=35 \end{cases}$

$\sqrt[3]{x}=a, \sqrt[3]{y}=b$ $\begin{cases} a+в=5 \\ a^2-в^2=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+в=5 \\ a^2-ав+в^2=7 \end{cases}$ $\begin{cases} a+в=5 \\ a^3-в^3=35 \end{cases} \Rightarrow$

В соответствии с формулой кубов мы объединяем вместо этого.

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$35 = 5^3 - 3ab\cdot5$

$35 = 125 - 15ab$

$15ab = 90 \to ab = 6$, бизде $\begin{cases} a+в=5 \\ ab=6 \end{cases}$

$x^2 - (a + b)x + ab = 0$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$D = 25 - 4\cdot6 = 1$

$t_1 = (5 + 1)/2 = 3$

$t_2 = (5 - 1)/2 = 2$

решение: t = 2 и t = 3

a = 2, b = 3 и a = 3, b = 2

$\sqrt[3]{x}=2, \sqrt[3]{y}=3$

Ответ: x = 8, y = 27 и x = 27, y = 8 ✅

$$\begin{cases} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5 \\ 8 + 27 = 35 \end{cases}$$

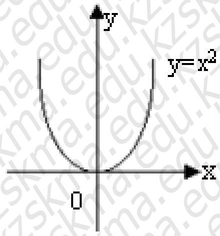
Степенная функция, ее свойства и график.

Степенная функция $y=x^n$, где n – любое действительное число.

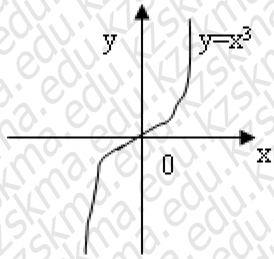
1) при n=2 получим квадратную функцию $y=x^2$, ее графиком является парабола.

Свойства функции $y=x^2$:

1) область определения $D(y) \in R$
2) $x^2 = (-x)^2$ - четная
3) $x^2 \geq 0$, значит ограничена снизу
4) $x \in [0; \infty)$ - возрастает, $x \in (-\infty; 0]$ - убывает



2) при n=3 получим функцию $y=x^3$, ее графиком является кубическая парабола.Свойства функции $y=x^3$:
1) область определения $D(y) \in R$
2) $x^3 = (-x)^3$ - нечетная
3) $x \in (-\infty; +\infty)$ - возрастает



Степенная функция $y=x^n$ в случае, когда n - четное число, обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$, а в случае, когдаn – нечетное число, теми же свойствами, что и функция $y=x^3$.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Какие уравнения могут быть выведены при решении иррационального уравнения?
- Почему при решении иррациональных уравнений внимание уделяется области определения иррационального выражения?
- Что такое иррациональная система уравнений?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Решите неравенства.

$a)\ \frac{\sqrt{21-4x-x^2}}{x-2} < 1;$ б) $\frac{1-\sqrt{8-x^2}}{2x} < 1$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №11

1.1. Тема занятия: Показательная функция.

Количество часов:3 135 мин

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся построению показательной функции, ее свойств и графиков, а также решению задач с использованием свойств функции.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

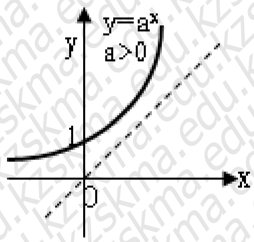
1.4. Основные задачи темы:

- Степени и корни.
- Корень n-ой степени и его свойства.
- Преобразование иррациональных выражений.

Объяснение новой темы: 40 мин

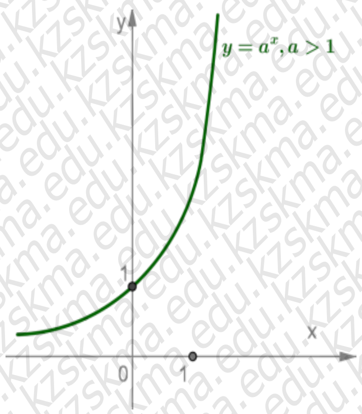
Показательная функция, ее свойства и график Характеристика свойств показательной функции по графику.

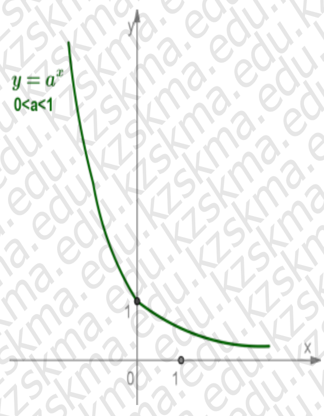
Показательная функция *$y=a^x$*, где основание степени а – данное положительное число, не равное единице, а показатель степени х – переменная величина, которая может принимать любые действительные значения. а□0, а>0.



Основные свойства показательной функции

1. Область определения функции − множество R действительных чисел.
2. Область значений функции: E(y)=(0;+∞).
3. Функция строго монотонно возрастает на всей числовой прямой
4. Функция ни четная, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. График любой показательной функции проходит через точку (0;1).
9. Показательная функция не имеет точек экстремума, то есть она не имеет точек минимума и максимума функции.





1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что называется показательной функцией?
- Как определяется показательная функция?
- Назовите своиства показательных функций?
- Будет ли симметричным график показательной функции?

1.6.Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Определите, в скольких точках пересекаются графики функций.

. $f(x)=2^x,\ f(x)=x^2$ 2. $f(x)=2^x,\ f(x)=x^4+1$ 3. $f(x)=2^x,\ f(x)=3x^2$

Нарисуйте график данной функции.

1. $y=3^x$
2. $y=(1/2)^x$
3. $y=(1/10)^x$

Какая из заданных показательных функций является возрастающей или убывающей?

1. $y=4^x$
2. $y=(1/4)^x$
3. $y=10^x$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №12

1.1. Тема занятия: Показательные уравнения, неравенства и их системы.

Количество часов: 3 ч. **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Обучение обучающихся находить степени с действительным показателем и преобразовывать выражения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Подходы к показательным уравнениям.
- Способы решения системы показательных уравнений.
- Система экспоненциальных неравенств.

Объяснение новой темы: 40 мин

Показательные уравнения, неравенства и их системы.

Определение. Уравнение содержащее неизвестную переменную в показателе степени называется показательным уравнением.

Пример, $2^x=\frac{1}{16}$; $\sqrt[3]{5^x}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}}$ т.б.

Показательным уравнения решают двумя способами.

1. приведение к одному основанию. Приимер**:** $27^{x} = \frac{1}{81}$ обе части уравнения приводят к основанию три $3^{3x} = 3^{-4}$

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$ ответ: $-\frac{4}{3}$

2. метод введения новой переменной . Пример: $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$ преобразуем показатели уравнения $3^{2x+5} = 3^{2x} * 3^{5} = 243 * 3^{2x}$ и $3^{x+2} = 3^{x} * 3^{2} = 9 * 3^{x}$

$243 * 3^{2x} - 9 * 3^{x} - 2 = 0$ $y = 3^{x}$

$243y^{2} - 9y - 2 = 0$ $y_1 = \frac{1}{9}$, $y_2 = -\frac{2}{27}$

Найденное $y_1 = \frac{1}{9}$, значение $y = 3^{x}$ подставляем в уравнение. $\frac{1}{9} = 3^{x}$ отсюда $x = -2$

ответ**:** -2

Решение системы показательных уравнении.

Пример.

$$\begin{cases} 3*2^{x} + 2*3^{y} \equiv \frac{11}{4} \\ 2^{x} - 3^{y} \equiv -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Решение: 2 умножим обе части уравнений на 2

$$\begin{cases} 3*2^{x} + 2*3^{y} \equiv \frac{11}{4} \\ 2*2^{x} - 2*3^{y} \equiv -\frac{6}{4} \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы. $5*2^{x} = \frac{5}{4}$ $x = -2$

X=-2 найдем значение y-ка путем подстановки x во второе уравнение.

$2^{-2} - 3^{y} = -\frac{3}{4}$, $3^{y} = 1$, $3^{y} = 3^{0}$, $y = 0$ Ответ: (-2; 0)

Пример: $3\sqrt{x+1+1}$ $-28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$ найти найбольше целое значение x .

Решение: $3^{\sqrt{x+1}} = y$

$3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$

$3y^{2} - 28y + 9 < 0$ $\frac{1}{3} < y < 9$ $\frac{1}{3} < 3^{\sqrt{x+1}} = 9$ $3^{-1} < 3^{\sqrt{x+1}} < 3^{2}$, $3 > 1$ ответ 2.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что называется показательных уравнений?
- Какими способами решают показательные уравнения?
- Как решаем системы показательных уравнении?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Решите неравенство:

1) $3^x=81$ 2) $4^x=256$ 3) $2^{x}=\frac{1}{32}$. 4) $5^{x+1}=125$

1) $8^x=16$ 2) $25^x=\frac{1}{5}$ 3) $4^{3-2x}=4^{2-x}$ 4) $2^{x-2}=1$

1) $32^{x+1}=9^{2x}$ 2) 2ł2^{2x}-3ł2^x – 2=0

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5^x + 5^y = 30 \\ 5^x - 5^y = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1.8.Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №13

1.1. Тема занятия: Логарифмическая функция.

Количество часов:2 **90 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** ознакомить обучающихся с понятием логарифм числа, научить основному логарифмическому равновесию, свойствам логарифма, нахождению логарифма числа.
- **воспитательная:** формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Понятие логарифма числа
- Логарифм числа и его свойства.
- Логарифмическая функция, ее свойства и график

Объяснение новой темы: 27 мин

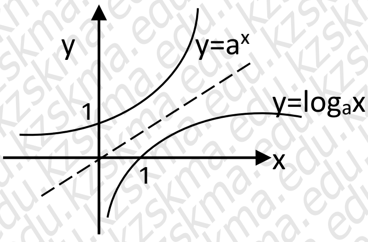
Логарифмическая функция, ее свойства и график Логарифм числа и его свойства. Логарифмическая функция, ее свойства и графики

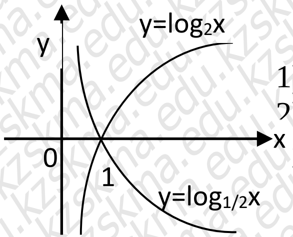
Определение: Логарифмом числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.

Обозначение логарифма: $\log_a N = x$, где а – основание логарифма, N – заданное число.

Из определения логарифма можно записать показательное уравнение: $a^x=N$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ ($x\in R_+$, $a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$) является обратной по отношению к показательной $y=a^x$. Поэтому их графики симметричны относительно I и III координатных углов.





Свойства функции:

1) $D(y)=R_+$
2) $E(y)=R$
3) $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$

4)]0;+∞[- возрастает, если a>1
5) логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логариф-мы чисел, больших единицы, отрицательны.

Основные свойства логарифма.

При любом *a>0, b>0, a≠1и любых положительных x и y выполнены равенства:.*

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a x^p = p\log_a x$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$
7. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Определение: логарифмом числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.
Обозначение логарифма: $\log_a N = x$, где а – основание логарифма, N – заданное число.
Из определения логарифма можно записать показательное уравнение: $a^x=N$.
Примеры: 1) записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

а) $5^2 = 25 \Rightarrow 2 = \log_5 25$; в) $8^{-3} = \frac{1}{512}$; д) $10^0=1$

б) $7^3 = 343 \Rightarrow \log_7 343 = 3$; г) $10^{-2} = 0{,}01$;

2) Записать без знака логарифма следующие равенства:

а) $\log_{10} 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 1000$; в) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$;

б) $\log_{10} 0{,}001 = -3$; г) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

3) Найти логарифмы данных чисел: а) $\log_2 16 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

б) $\log_6 36$; в) $\log_8 1$; г) $\log_5 125$; д) $\log_{1/3} 27$; е) $\log_3 \frac{1}{81}$.

4) Определить x по заданным условиям:

а) $\log_4 x = -3 \Rightarrow 4^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{64}$;

б) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \Rightarrow \sqrt{x^3} = 2^{-3} \Rightarrow x^3 = 2^{-6} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация
Закрепление новых темы. 9 мин

- Что такое логарифм?
- Что называется равенства логарифма?
- Что называется десятичный логарифм?
- Что называется натуральный логарифм?

- Какие онавные своиства логарифма?

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Решение задач:

а) $3^2 = 9$ г) $7^0 = 1$

б) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ д) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

в) $9^{\frac{1}{2}} = 3$ е) $32^{\frac{3}{5}} = 8$

2. Найти логарифмы данных чисел а :

а) $25,\ \frac{1}{5},\ \sqrt{5},\quad a = 5$ если

б) $64,\ \frac{1}{8},\ 2,\quad a = 8$ если

3. Найти логарифмы данных чисел х.

а) $\log_3 x = -1$ г) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$

б) $\log_4 x = -3$ д) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$

в) $\log_x 81 = 4$ е) $\log_x \frac{1}{16} = 2$

4. 3 негізі бойынша логарифмде *(a>0, b>0).*

а) $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$ б) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$

5. 10 негізі бойынша логарифмде, если *a>0, b>0, c>0.*

а) $100\sqrt{ab^3c}$ в) $10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3}$

б) $\frac{a^5}{0,1c^2\sqrt{b}}$ г) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5}$

6. $\log_2 5 = a$ и $\log_5 3 = b$ *a* мен *b* арқылы өрнектеңіз:

а) $\log_5 72$ б) $\log_5 15$

7. Вычислите:

а) $\lg 8 + \lg 125$ в) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$

б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$ г) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$

Решение задач.

а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ д) $\log_7 343 = 3$

б) $\log_{16} 1 = 0$ е) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$

в) $\log_5 0{,}04 = -2$ ж) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$

г) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \dfrac{14}{3}$ з) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №14

1.1. Тема занятия: Логарифмические уравнения и неравенства и их системы.

Количество часов: 3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Ознакомить обучающихся с понятием логарифм числа, научить основному логарифмическому равновесию, неравенства и нахождению логарифма числа.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Понятие логарифма числа
- Логарифм числа и его свойства.
- Методы решение логарифмических уравнений, неравенств и систем.

Объяснение новой темы: 40 мин

Методы решение логарифмических уравнений, неравенств и систем.

Определение: Уравнение в котором неизвестная содержится по знаком логарифма называется логарифмическим уравнением.

Пример: а) решить уравнение $\log_x(2^3 - 5x + 10) = 3$.

X^3 -5x+10=x^3

$\log_2(2^3 - 5*2 + 10) =$ $\log_2 8$=3

x= 2 ответ: 2

Для решения системы логарифмических уравнении применяются способы решения

алгебраических систем. Пример: решить систему уравнении

$$\begin{cases} \lg x - \lg y \equiv 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y \equiv 5 \end{cases}$$

lg x =a, lg y=b тогда,

последнию систему уравнении можно решить способом подстановки. $a_1=2$,

$$\begin{cases} a-b\equiv 1 \\ a^2+b^2\equiv 5 \end{cases}$$

$в_1=1$ и $a_2=-1$, $в_2=-2$. lg x =a, lg y=b перейдем к x и y и найдем lg x =2, lg y=1 и lg x =-1, lg y=-2. Тогда $x_1=100$, $y_1=10$ и $x_2=0{,}1$, $y_2=0{,}01$

Ответ: (100:10)и (0,1; 0,01)

Определение: Неравенство в котором неизвестная содержится по знаком логарифма называется логарифмическим неравенством.
Любое значение неизвестной переменной обращающее неравенство в верное числовое неравенство называется решением неравенство.
Решить логарифмическое неравенство значит найти все его решения или доказать что нет решений.
Пример: решить неравенство $\log_{1/3}(2x+5)<-2$
Решение. Запишем правую часть неравенство через логарифм по основанию 1/3 тогда $-2 = \log_{1/3}9$ поэтому данное неравенство обрашается в следующее неравенство.

$\log_{1/3}(2x+5)<\log_{1/3}9$ здесь a=1/3 .

$$\begin{cases} 2x+5\succ 0 \\ 2x+5\succ 9 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x\succ \frac{2}{5} \\ x\succ 2 \end{cases}$$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что такое логарифмические уравнение?
- Как обозначается обычная логарифмическая уравнения?
- Сколько методы есть в решение систему уравнении?
- Что такое логарифмические неравенства?
- Что называется решением неравенство?

1.6.Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Решите логарифмические уравнения

1. $\log_3(2x-1)=2$
2. $\ln(3x-5)=0$
3. $\log_3(4-x)=1$
4. $\log_5(x+1)=\log_5(4x-5)$
5. $\log_2(4-x)=\log_2(1-2x)$

Решить систему логарифмических уравнений

1. $\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ \log_2 x+\log_2 y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \lg x+\lg y=\lg 2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_2(x+y)=3 \\ \log_{15} x=1-\log_{15} y \end{cases}$

Решите логарифмические неравенство.

1.$\log_5(3+8x)>0$

2. $\log_2(x-3)\leq 3$

3. $\log_2(2x+5)>\log_2(x-7)$

4. $\log_3(3x-1)<\log_3(2x+3)$

5. $\lg(x^2+2x+2)<1$

6. $(\log_2 x-4)(5x^2+x-6)\geq 0$

7. $\log_2(x^2+10)<4$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №15

1.1. Тема занятия: Предел функции. Нахождение пределов.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Определения предела и неразрывности функции в точке,точки неразрывности, понятие непрерывной функции и ее свойства ознакомить с поиском предела функции, научить его исследовать неразрывность.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Определение предела функции в точке.
- Какие основные свойства предела.
- Область определения функции.

Объяснение новой темы: 40 мин

Предел функции в точке и на бесконечности. Определение предела функции в точке и на интервале Предел числовой последовательности. Непрерывность функции в точке и на бесконечности. Асимптоты графика функции.

Предел функции. Число A называется пределом функции f(x) при $x\to a$, если для любогочисла $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для любого $x\neq a$, удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim f(x)=A$.

Если число A_1 (число A_2) есть предел функции y=f(x) при x, стремяшимся к *a* так, что *x* принемает только значения, меньшие (большие) *a*, то $A_1(A_2)$ называется левым(правым) пределом функции f(x) в точке *a*. При этом соответственно пишут $\lim f(x)=A_1$, $\lim f(x)=A_2$.

2. **Бесконечные малые и бесконечно большие функции**. Функция f(x) называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim f(x)=0$.

Функция f(x) называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim f(x)=\infty$, или $\lim f(x)=+\infty$, или $\lim f(x)=-\infty$.

Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то ее можно представить в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x\to a$. Наоборот, если функция f(x) может быть представлена в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x\to a$, то эта функция имеет конечный предел при $x\to a$, который равен значению постоянной.

Основные свойства предела:

Обозначение предела

Предел функции обозначается как $f(x) \to L \quad \text{при} \quad x \to a$ или через символ предела: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Всюду ниже предполагается, что пределы функций $\lim\limits_{x \to a} f(x),\ \lim\limits_{x \to a} g(x),\ \lim\limits_{x \to a} f_1(x),\ \ldots,\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ существуют.

Предел суммы

Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

Расширенное правило суммы

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) + \ldots + f_n(x) \right] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \ldots + \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Предел постоянной величины

Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:

$$\lim_{x \to a} C = C.$$

Предел произведения функции на постоянную величину

Постоянный коэффициент можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

Предел произведения

Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций (при условии, что последние существуют):

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Расширенное правило произведения

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) \right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Предел частного

Предел частного двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \text{если} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Предел степенной функции

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^p = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^p,$$

где степень *p* - действительное число. В частности,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Если *f* (*x*) = *x*, то

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{и} \quad a \neq 0, \ \text{если} \ n \leq 0.$$

Предел показательной функции

$$\lim_{x \to a} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to a} f(x)},$$

где основание *a* > 0.

Предел логарифмической функции

$$\lim_{x \to a} \left[\log_a f(x) \right] = \log_a \left[\lim_{x \to a} f(x) \right],$$ где основание *a* > 0.

Предел функции на бесконечности.

Определение предела последовательности при $x \to \infty$.

Рассмотрим решение некоторых примеров:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\right)^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$, т.к. при $x\to\infty$ величины $\frac{6}{x},\frac{5}{x^2}$ и $\frac{1}{x^3}$ - б.м. и их пределы равны 0.

2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$ приведем этот предел к виду $\underline{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ - *первый замечательный предел.* Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем за знак предела. Имеем: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{2\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$, т.к. если $\alpha\to 0$, то и 2 $\alpha\to 0$, получим: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=2\lim\limits_{2\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1=2$

Если $x\to\infty$, то имеет место соотношение $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2{,}7182\ldots}$, которое называется *вторым замечательным пределом*.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1}=3.$$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

1. Что такое предел функции в точке?
2. Как называется бесконечные малые и бесконечно большие функции?
3. Какие основные свойства предела?
4. Что называется линейных уравнений?
5. Что называется областью определения функции?

1.6.Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Выполните задания.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)$

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}(7x+2)$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$

6. $\lim\limits_{x\to}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^4-25}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

1. $$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\left(\lim_{x\to\infty}x\right)^3\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=$$
$$=(\infty)^3(1-0+0-0)=\infty$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{5+0}=\frac{2}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{5}{x^3}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=2$$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №16

1.1. Тема занятия: Производная.

Количество часов:2 **90 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Дать обучающимся представление о производной функции,объяснить геометрический и физический смысл.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 5 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Определение производной
- Производная и ее геометрический смысл.
- Производная и ее физический смысл.
- Правила дифференцирования.

Объяснение новой темы: 27 мин

Определение производной. Понятие дифференциала функции.

Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x и x_1. Разность x_1-x называется приращением аргумента, а а разность $f(x_1)-f(x)$ называется приращением функции при переходе от значения аргумента x к значению аргумента x_1. Приращение аргумента обозначают Δx; значит, $\Delta x=x_1-x$, т.е. $x_1=x+\Delta x$. Приращение функции обозначают Δf или Δy; значит, $\Delta f=\Delta y=f(x_1)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Пример: Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ справедливо равенство $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение: Имеем $f(x) = kx + b$, $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b$. Значит, $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x$, откуда получаем $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, что и требовалась доказать.

Определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке х и в некоторой окрестности этой точки. Пусть Δx - приращение аргумента, причем такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки х, а Δf - соответствующее приращение функции, т.е. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке х, а этот предел называется значением производной функции $y = f(x)$ в точке х и обозначается $f'(x)$ или $y'(x)$. Итак,

$$y' = f'(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ - это новая функция, определенная во всех таких точках х, в которых существует указанный выше предел; эту функцию называют производной функции $y = f(x)$.

Пример: Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2$.

Решение: Имеем

$f(2) = 2^2 = 4$; $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2$. $\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$

Тогда, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x; \lim \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(4 + \sqrt{x}\right) = 4$

Значит, $f'(2) = 4$.

Опираясь на определение, можно рекомендовать следующий план отыскания производной функции $y = f(x)$:

1. Фиксируем значение х, находим $f(x)$.
2. Даем аргументу х приращение Δx, находим $f(x + \Delta x)$.
3. Вычисляем приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составляем отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. Находим предел отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием.**

Правила дифференцирования

1. $dx^n = nx^{n-1}dx.$
2. $da^x = a^x \ln a dx.$
3. $d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x \ln a}.$

$d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}.$

4. $d(\sin x) = \cos x dx.$
5. $d(\cos x) = -\sin x dx.$
6. $d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}.$
7. $d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}.$
8. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
9. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1+x^2}.$
11. $d(arcctgx) = -\dfrac{dx}{1+x^2}.$
12. $df(u) = f'(u)du$

Правила нахождения производных.

Производная степенной функции $y = x^n$ можно находит по этой формуле:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (1)

Действительно, так как $x=e^{\ln x}$, то $x^n = e^{n \ln x}$. Отсюда по правилу вычисления производной сложной функии получаем:

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x}(n \ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

формула доказана.

Примеры: 1) $y = 1 - 2x^2$

Решение: $y' = (1-2x^2)' = (1)' - (2x^2)' = 0 - 2*2x = -4x$

2) $y = x - \sin x$

Решение: $y' = (x - \sin x)' = (x)' - (\sin x)' = 1 - \cos x$

3) $y = 3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x$

Решение:

$$y' = (3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x) = (3x^6)' + (\sqrt{x})' + (2x^2)' + (\cos x)' = 18x^5 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x - \sin x$$

Производные тригонометрических, показательных и логарифмических функций и применение производных при решении задач.

1. Производные тригонометрических функций.
2. $(\sin x)' = \cos x$,
3. $(\cos x)' = -\sin x$
4. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
5. $(ctgx)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

Примеры:

1) $y = \dfrac{1}{2}\sin x + 2\cos 3x \quad y' = \dfrac{1}{2}\cos x - 6\sin 3x$

2) $y = 5tg^2x - ctg^3x;\ y' = \dfrac{10tgx}{\cos 2x} + \dfrac{3ctg^2x}{\sin^2 x}$

3) $y = x - \sin x:\ y' = (x - \sin x)' = (x)' - (\sin x)' = 1 - \cos x$

4) $y = 3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x$

$y' = (3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x) = (3x^6)' + (\sqrt{x})' + (2x^2)' + (\cos x)' = 18x^5 + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x - \sin x$

- Производные логарифмических функций.

$\left(\log_a{}^x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Примеры:

1. $\left(\log_3{}^2\right)' = \dfrac{1}{2\ln 3}$

Производные показательных функций.

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad \left(e^x\right)' = e^x$

$f(x) = (x \cdot 7^x)' = (x)' \cdot 7^x + x \cdot \left(7^x\right)' = 7^x + x \cdot 7^x \ln 7 = 7^x(1 + x\ln 7)$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Что такое производное?
- Производная и ее геометрический.
- Производная и ее физический смысл.
- Правила дифференцирования.

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 31 мин

Нужно определить дифференциал функции:

$y = (0{,}2 - \sqrt[3]{x})^2$ 2. $y = \sqrt{(1+2x)^3}$ 3. $y = (\sqrt{3x} + 1)(\sqrt{3x} - 1)$

4. $y = 0{,}5x\sqrt{(2x - 0{,}3)^2}$ 5. $y = 1 + 0{,}2tg^2x$

Найдите производные.

1. y (x)= $2x^3 - x^2 - 4x + 5$ 6. $f(x) = \left(\dfrac{3x^2 - 1}{x + 1}\right)'$
2. y (x)= $10 - 12x - x^2$ 7. $f(x) = (5x^2 - 1)\cdot(4x + 2)$
3. y (x)= $-3x^2 + 13x - 12$ 8. $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2x - 1}\right)'$
4. y (x)= $4 - 8x - 5x^2$
5. y (x)= $4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ 9. $f(x) = (3x - 5)\cdot(3x + 1)$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 17

1.1. Тема занятия: Производная сложной функции.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Познакомить обучающихся с понятием сложной функции, формулой нахождения произведения, объяснить решение задач на поиск его произведения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Понятие сложной функции.
- Сборка сложной функции.
- Формула нахождения производной.

Объяснение новой темы: 40 мин

Понятие сложной функции, формула производных сложной функций, построение сложной функции.

Сложная функция и ее дифференцирование.

Рассмотрим функцию *** . Чтобы найти значение этой функции в фиксированной точки x, нужно : 1) вычислить x^2; 2) найти значение синуса при полученном значений x^2. В подобных слуаях говорят, что задана сложная функция f(g(x)) здесь $g(x)=x^2$ и f=sing(x)

Пусть y=f(g(x))-сложная функция, причем функция u=g(x) дифференцируема в точке x, а функция y=f(u) дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция y=f(g(x)) дифференцируема в точке x, причем

y'=f'(g(x))*g'(x)

Запись f'(g(x))означает, что производная вычесляется по формуле для f'(x), но вместо x подставляется g(x).

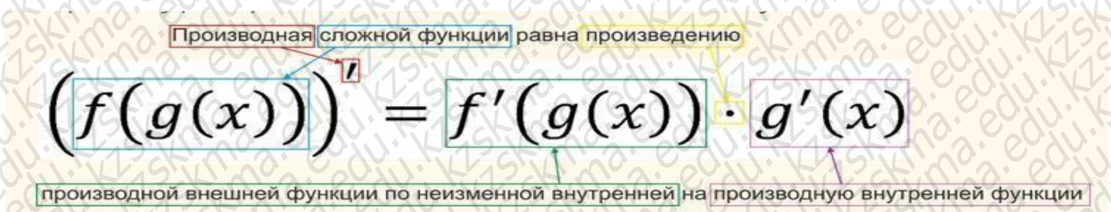
Пример5. Найти производную функции.

$$y = tg(x^2 + x + 1)$$

$$y' = (tg(x^2 + x + 1))' = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x + 1)} * (x^2 + x + 1)' = \frac{2x + 1}{\cos^2(x^2 + x + 1)}$$

Для нахождения производной степенной функции можно использовать правило нахождения производной от степенной функции не только для натуральных, но и для любых показателей, то есть для любого действительного числа n

$(x^n)'=nx^{n-1}$ (x>0)



Пример 6. Найти производную функции $y = \frac{1}{k}$

$$y = \frac{1}{k} \Rightarrow y' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^2 = -\frac{1}{x^2}$$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 9 мин

- Напишите формулы производная тригонометрических функций.
- Напишите формулы производная показательной функции.
- Напишите формулы производная степенных функций.

1.6.Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Найдите производную функции:

1. $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$
2. $y = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$
3. $y = \sin xe^{\cos x}$
4. $y = \sqrt{1 + 2tgx}$
5. $y = (1 + \sin^2 x)^4$
6. $y = e^{-x^2} \ln x$
7. $y = \sin^2(\cos 3x)$
8. $y = arctg\,(x^2 - 3x + 2)$
9. $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$
10. $y = e^x(\sin 3x - 3\cos 3x)$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №18

1.1. Тема занятия: Физический и геометрический смысл производной.

Количество часов:3 **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Ознакомление обучающихся с физическим и геометрическим значением произведения и объяснение решения задач на поиск его произведения.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Уравнение касательной к графику функции.
- Физический и геометрический смысл произведения.

- Понятие касательной, уравнение касательной к графику функции;
- Параллельные и перпендикулярные касательные, проведенные на прямой.

Объяснение новой темы: 40 мин

Уравнение касательной к графику функции. Физический и геометрический смысл производной и их применение в задачах, связанных с технико-технологическими.

Физический смысл производной.

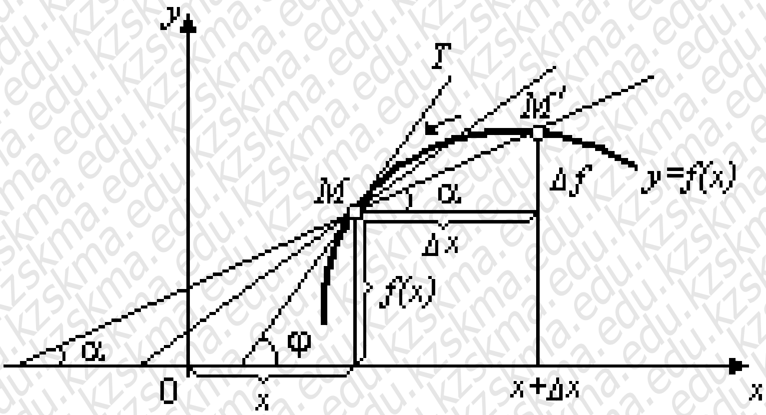
Если $S = S(t)$- закон прямолинейного движения, то $S'(t)$ выражает скорость движения в момент времени t, т.е. $V = S'(t)$ (мгновенная скорость).

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $S = 0{,}5gt^2$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$V = S' = \left(0{,}5gt^2\right) = 0{,}5g\left(t^2\right)' = 0{,}5g \cdot 2t = gt$

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x выражает скорость изменения функции в точке x, т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$. В этом состоит физический смысл производной. Например, для функции $y = x^2$ имеем $f'(x) = 2x$, при $x = 2$ имеем $f'(2) = 4$, а при $x = 3$ имеем $f'(3) = 6$. Это значить, что в точке $x = 2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точки $x = 3$ - в 6 раз быстрее.

Геометрическое истолкование производной.



Пусть кривая KL, представленная на рисунке 1, есть график функции $y = f(x)$. Отметим на ней две точки: М с координатами (x,y) и M$_1$ с координатами $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведем отрезок MP параллельно оси абсцисс. В треугольнике MM$_1$P $MP = \Delta x$, $M_1P = \Delta y$. Поэтому отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла α, образованного секущей MM$_1$ с осью абсцисс. При $\Delta x \to 0$ точка M остается неподвижной, а M$_1$ неограниченно приближается вдоль кривой к точке M. Секущая MM$_1$ все это время меняет свое направление. Вместе с этим изменяется и угол α. При этом $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha$.

В пределе хорда MM_1 займет положение касательной MN, и образуя с осью абсцисс некоторый угол β. Очевидно, что при этом $\beta = \lim\limits_{\Delta \to 0} \alpha$, и $tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha$, но $tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Следовательно, $tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x равна **тангенсу угла н**аклона касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Что такое производное?
- Производная и ее геометрический.
- Производная и ее физический смысл.
- Какова формула Лагранжа?

1.6.Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин

Напишите уравнение касательной, проведенной в точке x_0, на графике функции y= f (x).

1. $f(x) = 1 - 2x$, $x_0=1$
2. $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0=-3$
3. $f(x) = x - 3x^2$, $x_0=2$
4. $f(x) = -2x^2 - 3$, $x_0=-2$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №19

1.1. Тема занятия: Применение производной.

Количество часов: 3 135 мин

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Разъяснение обучающимся условий возрастания и убывания функции и нахождения критических и экстремумных точек, решение задач.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Условия возрастания и убывания функции.
- Критические и экстремумные точки функции.
- Нахождение точек максимума и минимума в задачах, связанных с технико-технологическими процессами.

Объяснение новой темы: 40 мин

Признаки возрастания и убывания функции. Точки экстремума. Максимумы и минимумы в технико-технологических задачах.

1.Если для точек x_1 и x_2 интервала]a,b[из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)$□$f(x_2)$,

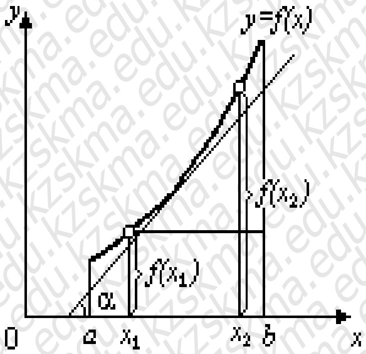
то функция f(x) на интервале]a,b[*возрастающая*.

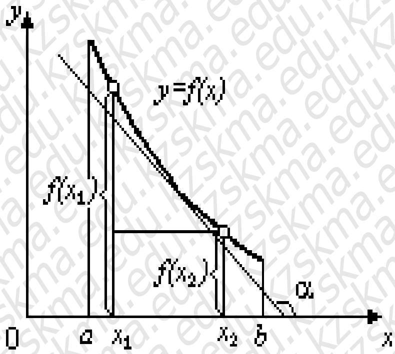
б) Если из неравенства $x1<x2$ следует $f(x1)<f(x2)$, то функция называется *строго возрастающей*.

2⁰. а) Если для точек $x1$ жёне $x2$ интервала]a,b[из неравенства $x1<x2$ следует f(x1)f(x2),то f(x) на интервале]a,b[*убывающая* функция.

б) Если из неравенства $x1<x2$ следует $f(x1)>f(x2)$, то функция *строго убывающая*.

Возрастающие, строго возрастающие, убывающие, строго убывающие функции – *монотонные* функции.





Необходимое и достаточное условие возрастания и убывания функции.

Теорема 1. 1) Если дифференцируемая функция f(x) на интервале]a,b[возрастает, тов любой точке этого интервала

1) Если дифференцируемая функция f(x) на интервале]a,b[убывает, то в любой точке этого интервала .

2) Если дифференцируемая функция f(x) на интервале]a,b[не изменяется, т.е.остается постоянной, то в любой точке этого интервала .

Теорема 2. 1) Если производная функции f(x) на интервале]a,b[положительна, то функция f(x) на этом интервале *строго возрастает*.

2) Если Если производная функции f(x) на интервале]a,b[отрицательна, то f(x) на этом интервале *строго убывает*.

3) Если Если производная функции f(x) на интервале]a,b[равна нулю, то f(x) на этом интервале *не изменяется.*

Можно следующим алгоритмом находить промежутки с помощью производных любого дифференцирование возрастания, убывания и постоянства функции f(x).

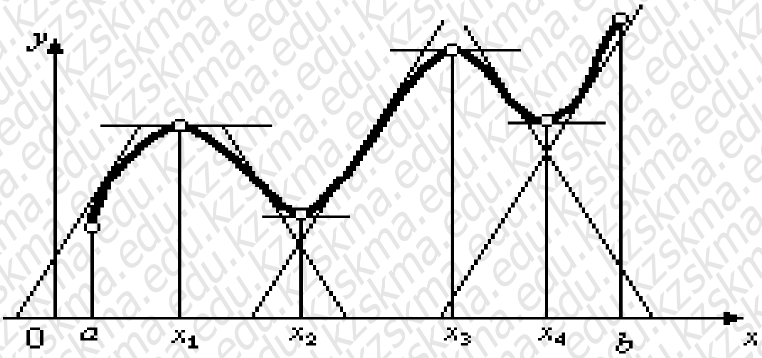
1. Найти области определение функций.
2. Найти производной функции.
3. Записать промежутки с помощью теоремы производных возрастания и убывания функции.

Экстремум функции.

Теорема 3. Если дифференцируемая функция f(x) в точке имеет экстремум, то в той точке первая производная равна нулю:

Теорема 4. Если у дифференцируемой функции f(x) в точкепервая производная равна нулю и при переходе через эту точку производная меняет знак, то вточке имеется экстремум функции.

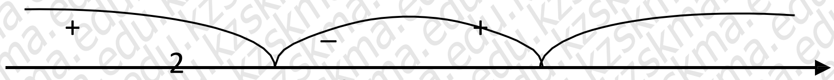
а) если знак производной меняется с плюса (+) на минус (–), то имеется *максимум*;б) если знак производной меняется с минуса (–) на пл юс (+), то имеется *минимум*.



1- пример. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ найти экстремумы функции. Решение **:**

1. $y' = 6x^2 - 30x + 36$; $y' = x^2 - 5x + 6$.
2. $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (критические точки).

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$ определяем точки в координате.



3. $y = (x-2)(x-3)$ знаки в промежутке производных .

$y'(1) = 1^2 - 5*1 + 6 = 2 > 0$

$y'(2{,}5) = (2{,}5)^2 - 5*2{,}5 + 6 = 6{,}25 - 12{,}5 + 6 = -0{,}25 < 0$

$y'(4) = 4^2 - 5*4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 > 0$

$x_1 = 2$ точка максимума, $x_2 = 3$ точка минимума.

1. экстремумы функции.

В точке $x_1 = 2$ $y_{max}(2) = 2*2^3 - 15*2^2 + 36*2 + 1 = 29$;

В точке $x_2 = 3$ $y_{min}(3) = 2*3^3 - 15*3^2 + 36*3 + 1 = 28$

Исследование функции с помощью производной и построение графика.

Для построения его графика на основе изучения функции используется алгоритм:

1.нахождение области определения функции.

2.Определение четности, планки и периода функции.

3.нахождение точек пересечения функции с осями координат и нескольких дополнительных точек.

4.нахождение производной и критических точек функции.

5.нахождение интервалов роста, убывания и экстремума функции.

6.построение графика функции с использованием результатов исследования.

например 1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ исследуем функцию и построим ее график.

1. $D(f) - R$
2. Функция не четная, не нечетная и не периодическая.
   $f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^3 - 12(-x)^2 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = -(-3x^4 - 4x^3 + 12x^2) \neq \pm f(x)$.
3. Ох точки пересечения с осью: (т. е. нули функции).

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(3x^2 - 4x - 12) = 0\,,\;\; x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 0$$

$$3x^2 - 4x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 \approx -1{,}4\,,\quad x_4 \approx 2{,}8$$

Дополнительные точки: $f(1) = -\dfrac{13}{12}$, $f(3) = \dfrac{9}{4}$.

4. 4. находим производную функции:

$$f'(x) = \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 \right)' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = x^3 - x^2 - 2x .$$

Производную приравниваем к нулю.

$$x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = -1,\; x_3 = 2 .$$

(-1, 0, 2 – точки кризиса).

5. 5. найденные кризисные точки определяют числовую прямую на четыре интервала $(-\infty;-1)$, (-1; 0), (0; 2), $(2;+\infty)$

Создаем таблицу:

x	(-∞; -1)	-1	(-1; 0)	0	(0; 2)	2	(2; +∞)
f ′(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘ *убывает.*	-5 *Min*	↗ возростает	0 *max*	↘ *убывает*	-32 *min*	↗ возростает

Монотонность функции:

$f'(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) = -8 - 4 + 4 = -8 < 0$, $(-\infty;-1)$-функция *убывает.*

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{8} > 0$, (-1; 0)-функция возростает

$f'(1) = 1^3 - 1^2 - 2*1 = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$, (0; 2)-функция *убывает.*

$f'(3) = 3^3 - 3^2 - 2*3 = 27 - 9 - 6 = 12 > 0$, $(2;+\infty)$- функция возростает

Экcртемумы функции:

$f_{\min}(-1) = 3*(-1)^4 - 4*(-1)^3 - 12*(-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5 .$

$f_{\max}(0) = 3*0^4 - 4*0^3 - 12*0^2 = 0 .$

$f_{\min}(2) = 3*2^4 - 4*2^3 - 12*^2 = 48 - 32 - 48 = -32 .$

График

1.5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новых темы. 25 мин

- Функция в каком промежутке убывает?
- Какой признак является достаточным признаком возрастания функции ?
- Если функция f(x) определялся в промежутке $[a;б]$ будет ли x=a экстремум?
- Признак максимума функции
- Признак минимума функции

1.6. Приложение 1

1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин.

Найти точки экстремума функции:

1. y (x)= $10-12x-x^2$
2. y (x)= $-3x^2+13x-12$
3. y (x)= $4-8x-5x^2$
4. y (x)= $4x^3-9x^2-12x+6$
5. f (x)= $1+3x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$
6. f (x)= $16x^3-15x^2-18x+6$
7. f (x)= $2x^3-3x^2-4x-7$
8. f (x)= x^3-2x+6
9. y (x)= $2x^3-x^2-4x+5$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №20

1.1. Тема занятия: Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Количество часов: 3 ч. **135 мин**

1.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Учить обучающихся находить наибольшее и наименьшее значения функции.
- **воспитательная:** Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата своим трудом.

1.3 Задачи обучения: научить применять знания полученные при изучении данный темы для решения прикладных задач.

Организационный момент: 10 мин

- Организация рабочей обстановки на занятий.
- Определение целей и задач занятия **.**

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные задачи темы:

- Функция и область ее определения.
- Значение функции, производной, вычисление производной.
- Критические точки, свойства непрерывной функции на отрезке .

Объяснение новой темы: 40 мин

Определение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. Раскрытие механического смысла производной.

Наибольшее значение функции на промежутке – это такое значение функции, которое не меньше всех других её значений на этом промежутке.

Наименьшее значение функции на промежутке – это такое значение функции, которое не больше всех остальных её значений на этом промежутке.

- $f(x)$ — функция,
- D — область определения,
- $[a, b]$ — отрезок (замкнутый промежуток),
- $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ — наибольшее значение,
- $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ — наименьшее значение.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции воспользуемся следующим алгоритмом.
1.f '(x)-найти производную функции.
2.решить уравнение f '(x)=0 и определить критические точки.
3.определить соответствующие критические точки для данного отрезка.
4.вычисление значения функции в крайних точках отрезка и соответствующих критических точках этого интервала.
5.определение наименьших значений функции по сравнению с найденными ее значениями.
Пример:Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=3x^2-6x+4$ на отрезке [1; 4].

1. Функция определена и непрерывна на [1; 4].
2. Найдём производную: $f'(x) = 6x - 6$.
3. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
4. Проверяем концы и критическую точку (но 1 — это конец):
   - $f(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 4 = 1$
   - $f(4) = 3(16) - 6(4) + 4 = 48 - 24 + 4 = 28$
5. Наименьшее значение — 1 при $x = 1$, наибольшее — 28 при $x = 4$.

1.5. Иллюстративные материалы: презентация
Закрепление новых темы. 25 мин
- Обязательно ли максимальное значение функции на отрезке (а;в) равно значению функции в точке максимума?
- Какое значение имеют слова Максимум и минимум?
- Каковы свойства непрерывной функции на отрезке?

1.6.Приложение 1
1.7. Самостоятельная работа обучающихся: 30 мин
y=f(x) найдите наибольшее и наименьшее значения функции в указанном отрезке. $f(x)=4x+5, [-1;2]$
1. $f(x)=x^2-5x+6, [0;3]$
2. $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2+1, [-1;1]$

Подведение итогов занятия: 10 мин
- Оценить уровень знаний обучающихся.

- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 21

1.1. Тема урока: Первообразная функция и неопределённый интеграл.

Количество часов: 3ч. **90 мин**

1.2. Цель урока:

Обучающая: обучить студентов свойствам неопределённого интеграла.

Воспитательная: формировать у студентов навыки достижения определённого результата и умение правильно использовать основные правила неопределённого интеграла.

1.3. Задачи урока: сформировать знания, умения и навыки нахождения неопределённого интеграла по изученной теме.

Организационный этап: 5 мин

- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные вопросы темы:

- Свойства неопределённого интеграла.
- Табличные интегралы.

Изложение нового материала: 27 мин.

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Табличные интегралы.

Определение 1. Пусть для переменной x, изменяющейся на множестве X, выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ Тогда функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на данном интервале.

Как и любая функция, первообразная может рассматриваться на множестве всех действительных чисел или на определённом интервале.

Правила интегрирования:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, мұндағы к – const
2. $\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,\ k \neq 0$

Таблица неопределённых интегралов:

1. $\int 0dx = C$
2. $\int 1dx = x + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (r \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$

14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$

Пример 1. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ на интервале $(-\infty;\infty)$, так как для всех $x \in (-\infty;\infty)$ выполняется $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$

Функция $\frac{x^3}{3} + 7$ также является первообразной для x^2, так как её производная равна $\frac{x^3}{3} + 7$ Очевидно, что вместо числа 7 можно подставить любую константу. Следовательно, задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

1.5. Иллюстративный материал: карточки для самостоятельной работы.

Закрепление нового материала. 9 мин.

- Что такое первообразная функция?
- В чём различие понятий производной и первообразной функции?
- Каковы правила нахождения первообразной?
- Что такое операция интегрирования?
- Как обозначается знак интеграла?

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 31 мин.

Найти первообразную:

1. f(x)= -5x+3
2. f(x)= $\frac{1}{x^3} + x$
3. f(x)= $\frac{x+2}{x}$
4. f(x)= e^{2x}
6. f(x)= cos 3x
7. f(x) = $e^{5x} + \frac{1}{x^6}$
8. f(x)= x^2+3sin x
9. f(x) = tg x $+ e^{2x}$

5. f(x)= $x^3 + \frac{1}{x^2}$ 10. f(x)= 7^x+x^7

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие № 22

1.1. Тема: Определенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Количество учебных часов: 3ч. 135 мин

1.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать понятие об определенном интеграла и показать его геометрический смысл; показать основные свойства и вычисление определенного интеграла.
- **воспитательная**: вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний поданной теме.

Организационный момент: 10 мин

а) организация рабочей обстановки на занятийб) определение целей и задач занятия

Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин

а) проверить уровень базовых знаний студентов

1.3. Задачи обучения.

Объяснение новой темы: 40 мин

Определенным интегралом от a до b непрерывной функции y=f(x), определенной наинтервале [a;b] , называется приращение первообразной F(x) для

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

этой функции, то есть

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.Геометрический смысл определенного интеграла:

Площать S криволинейной трапеции (фируры, ограниченной графиком непрерывной положительной на интервале [a;b] функции y=f(x), осью OX и прямыми x=a и x=b вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Определённый интеграл и его геометрический смысл.

Определение. Если для функции f(x), заданной на отрезке [a; b], существует предел суммы $\lambda \max \Delta x_0 \to \infty$, не зависящий от способа разбиения отрезка и выбора точек, то этот предел называется определённым интегралом функции f(x) на интервале от a до b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\cdot\Delta x_i,\ \ \varepsilon_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

Формула Ньютона–Лейбница:
Если F(x) – первообразная функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Основные свойства определённого интеграла и методы вычисления.

1^0. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2^0. $\int_a^a dx = b - a$

3^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4^0. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5^0 . $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, мұндағы к– const

6^0. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Пример 1. Найти $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$

Решение: Для функции $f(x) = (2x+3)^{-1}$ первообразная равна $F(x) = 0{,}5Ln|2x+3|$

Следовательно $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| \; \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - Ln5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$

1.4.Основные вопросы темы..

Закрепление пройденного материала: 25 мин

- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

1.5.Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии,ситуационныезадачи, работа в парах, презентации,кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

1.6.Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 31 мин.

Вычислить определённый интеграл:

1. а) $\int_{1}^{2}(2x-3)dx$ б) $\int_{-1}^{2}(1-2x-x^2)dx$

2. а) $\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx$ б) $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx$

3. а) $\int_{1}^{2}(2x^3+\sqrt{x}+x^2+2x-1)dx$ б) $\int_{1}^{2}(2x+1)^3dx$

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценить уровень знаний обучающихся.
- Объявить тему следующего занятия.

Занятие №23

1.1. Тема урока: Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач.

Количество часов: 3 **135 мин.**

1.2. Цель урока:

- обучение: Научить учащихся свойствам определенного интеграла.
- воспитательная: Формировать у учащихся навыки достижения определенного результата и привить навыки правильного использования основных правил определенного интеграла.

1.3 Задача урока: Анализ практических навыков, обучение учащихся логическому мышлению, различным связям между функциями.

Организационный этап: 10 мин.

- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 20 мин.

1.4. Основные вопросы темы:

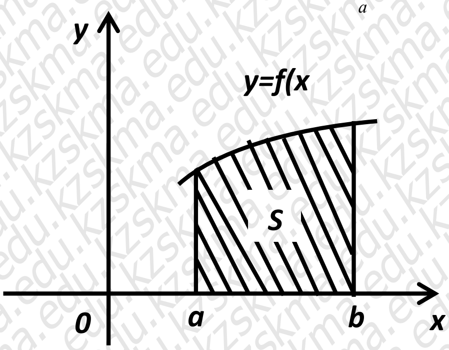
- Свойства определенного интеграла.
- Ньютон Лейбниц
- Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач.

Объяснение нового урока: 40 мин

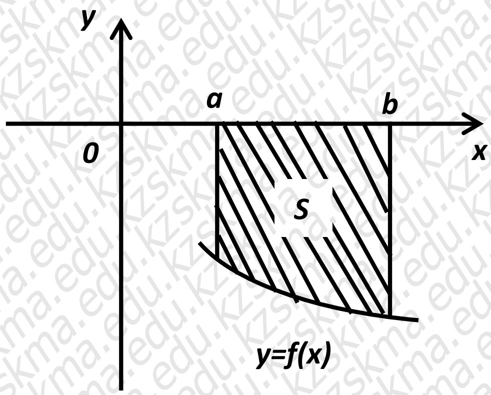
Применение определенного интеграла при решении геометрических и физических задач по технико-технологическому направлению.

Геометрический смысл

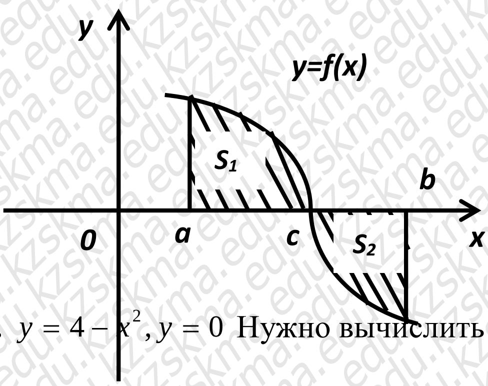
1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, принимающей положительные значения на отрезке, осью OX и прямыми x = a и x = b, определяется следующей формулой: $S = \int_a^b f(x)dx$



2.Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $x = a$, $x = b$, принимающей непрерывные отрицательные значения на отрезке, $y = f(x)$ осью OX и прямыми, определяется следующей формулой: $S = -\int_a^b f(x)dx$



3. *Предупреждение: Если $f(x)$ функция меняет знак на отрезке, то* $S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$



Пример 1. $y = 4 - x^2, y = 0$ Нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

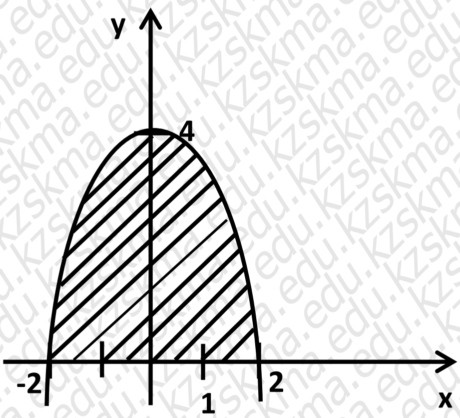
Решение: Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рисунке 3. По формуле (2) $S = \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = 4\int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4\left(2-(-2) - \frac{1}{3}(8-(-8))\right) = \frac{32}{3}$ кв. ед.

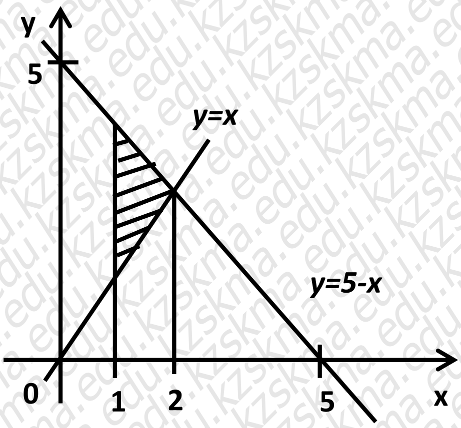
Пример 2. $y = x, y = 5 - x, x = 1, x = 2$ Нужно найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

Решение: Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рисунке 4 по формуле (1):

$$S = \int_{1}^{2}[(5-x)-x]dx = \int_{1}^{2}(5-x)dx - \int_{1}^{2} xdx = 5\int_{1}^{2} dx - 2\int_{1}^{2} xdx = 5x\Big|_{1}^{2} - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2} = 5(2-1) - -(4-1) = 2$$

кв. ед





1.5. Иллюстрированные материалы: работа с учебником.

Закрепление нового материала. 25 мин

- Что называют определенным интегралом?
- Как обозначается определенный интеграл?
- Как обозначается формула Ньютона-Лейбница?
- Как найти площадь фигуры?

1.6. Приложение 1

1.7.Контрольные задания: 30 мин

1. Рассчитайте:

2. а) $\int_{1}^{2}(2x-3)dx$ б) $\int_{-1}^{2}\left(1-2x-x^2\right)dx$

3. а) $\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x\right)dx$ б) $\int_{-1}^{2}\left(x^2-6x+9\right)dx$

4. а) $\int_{1}^{2}\left(2x^3+\sqrt{x}+x^2+2x-1\right)dx$ б) $\int_{1}^{2}(2x+1)^3 dx$

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания.

Занятие № 24

1.1. Тема урока: Вычисление объема тел вращения с помощью определенного интеграла.

Количество часов: 2 **90 мин**

1.2. Цель урока:

•обучение: Научить обучающихся вычислять объем тела вращения с помощью определенного интеграла и применять формулу вычисления объема тела вращения при решении задач.

•воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата и привитие умения целесообразно использовать основные правила определенного интеграла.

1.3 Задача урока: формирование знаний, умений и навыков по нахождению определенного интеграла по теме.

Организационный этап: 5 мин

•организация рабочей среды урока

•определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14мин

y=f(x)≥0 с изгибом и x=a, x=b (ограничены линиями, при вращении трапеции с кривой вокруг оси 0x (рисунок 3), объем полученного тела равен:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (3)$$

с изгибом y=g(y)≥0 и y=a, y=b (ограничены линиями, при вращении трапеции с кривой вокруг оси 0y

$$V=\pi\int_a^b g^2(y)\,dy$$

(рисунок 4), объем полученного тела равен: **(4)**

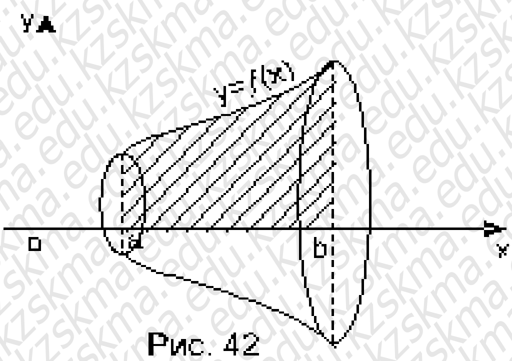


рисунок 3

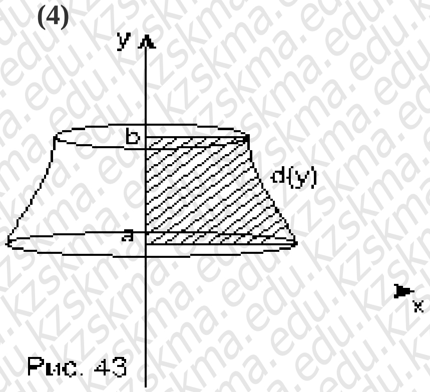


рисунок 4

Например

1. Определите объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной осью абсциссы и параболой, вокруг оси абсциссы. $y=4x-x^2$

Решение. В первую очередь, приравниваем уравнения оси абсциссы и y=0, определяя границы интеграла. Вычисляя эти границы, получаем две точки (0;0) и (4;0). Расчет искомого объема:

$$y=4x-x^2$$

$$V=\pi\int_0^4 (4x-x^2)^2dx=\int_0^4 (16x^2-8x^3+x^4)\,dx=\pi\left[\int_0^4 16x^2dx-\int_0^4 8x^3dx+\int_0^4 x^4dx\right]=$$

$$=\pi\left[16\frac{x^3}{3}-8\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^4=\pi\left[16\frac{4^3}{3}-8\frac{4^4}{4}+\frac{4^5}{5}\right]=$$

$$¿\pi(341,3-512+204,8)=34,1\pi.$$

$$V\approx107 \text{ куб.ед.}$$

1.5. Иллюстративные материалы: карточки для самостоятельных работ.
Закрепление нового материала. 9 мин
• Вычисление площадей плоских фигур с использованием определенного интеграла.
• Нахождение длины криволинейной дуги.
• Вычисление объема тела вращения.
• Назовите виды несобственных интегралов..
1.6.Приложение 1
1.7.Контрольные задания: 31 мин

5. Рассчитайте:

6. а) $\int_{1}^{2}(2x-3)dx$ б) $\int_{-1}^{2}(1-2x-x^2)dx$

7. а) $\int_{-1}^{0}(x^3-3x)dx$ б) $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx$

8. а) $\int_{1}^{2}(2x^3+\sqrt{x}+x^2+2x-1)dx$ б) $\int_{1}^{2}(2x+1)^3dx$

Подведение итогов занятия: 4 мин
- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания.

Занятие № 25
1.1. Тема урока: Вероятность. Элементы комбинаторики.
Количество часов: 3 **135 мин**
1.2. Цель урока:
• обучение: Научить учащихся применять элементы вероятности, формулы для расчета элементов математической статистики при решении задач.
• воспитательная: Формирование у учащихся навыков достижения определенного результата.
1.3 Задача урока: Формирование знаний, умений и навыков по нахождению вероятности на основе полученных знаний по теме.
Организационный этап: 10 мин
• организация рабочей среды урока
• определение целей и задач урока
Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 20 мин
1.4. Основные вопросы темы:
• Элементы комбинаторики и их применение для нахождения вероятностей
• Решение комбинаторных задач.
• Размещения, сочетания и с повторениями и

Элементы комбинаторики и их применение для определения вероятностей. Использование бинома Ньютона (с натуральными показателями) для приближенных расчетов. Расположения, комбинации и повторения с повторениями и без повторений. Решение комбинаторных задач.

Такие комбинации из n элементов по k элементов называются, в которых каждый содержит k элементов и отличаются друг от друга по составу или порядку расположения этих элементов.
Общее число размещений из n элементов по k определяется по формуле:
Здесь = 1*2*3*...*!=1.
Итак, мы пришли к понятию факториала.
В математике произведение натуральных чисел от 1 до n называется факториалом и обозначается!
Примеры:3! Они 1*2*3 = 6
4! Они 1*2*3*4 = 24

5! Они 1*2*3*4*5 = 120

6! Это 1*2*3*4*5*6 = 720. и д.

Приведем пример вычисления факториала:

10! / 8!*2! = 1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 / 1*2*3*4*5*6*7*8 *1*2 = 45.

Перестановками называются такие комбинации из этих элементов, каждая из которых содержит все эти элементы и отличается друг от друга только порядком расположения.
Общее число перестановок определяется по формуле:
Pn = n(n-1)... (n- n +1) = n! или
Pn = n!
Сочетаниями из n по k называются такие комбинации из n элементов, каждая из которых состоит из k элементов и отличается друг от друга только составом элементов.
Общее число сочетаний определяется по формуле:

Основной целью математической статистики является получение выводов о явлениях и процессах на основе наблюдений или экспериментов.
Статистическое распределение выборки можно задать последовательностью вариантов x1 вариационного ряда и соответствующих им частот п1 (сумма всех частот равна объему выборки п) или относительных частот w1 (сумма относительных частот равна 1).
1.5. Иллюстративные материалы: вырезки для самостоятельных работ.
Закрепление новой темы. 25 мин
• Что такое метод выбора?
• Что такое математическая статистика?
• Статистическое распределение выборки.
1.6. Приложение 1
1.7. Контрольные задачи: 30 мин
Пример: На трех станках в мастерской технического лицея изготавливаются детали. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность изготовления годной детали на первом станке равна 0,8. Найдите вероятность изготовления годной детали на первом станке.
Пример: В ящике 30 шаров, из них 15 красных, 10 синих и 5 зеленых. Найдите вероятность того, что случайно извлеченный шар не будет зеленым (событие А).
Подведение итогов занятия: 10 мин
- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания.

Занятие №26
1.1. Тема урока: Вероятность события и его свойства.

Условная вероятность.

Количество часов: 3 **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучающая: Научить обучающихся применять формулы расчета вероятности события и его свойств, элементов математической статистики при решении задач.

• воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата.

1.3 Задача урока: сформировать знания, умения и навыки по нахождению условной вероятности по теме.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Сложение и умножение вероятностей

• Случайная величина.

Методы выборкиПравила сложения и умножения вероятностей.

Несовместные события, независимые события, зависимые события, условная вероятность, сумма событий, произведение событий, случайная величина, непрерывная случайная величина, дисперсия и среднеквадратическое отклонение, изучение понятий и доказательство теорем. Решение задач с их использованием.

Определение: Если в ходе эксперимента одно из двух событий исключает выполнение другого, то такие события называются несовместными.

• если событие невозможно, то его вероятность равна нулю.

• если событие возможно, то его вероятность равна единице.

• если выполнение одного события возможно, но его наступление не является абсолютной истиной, то его вероятность — число, расположенное между числами 0 и 1.

Например; при броске монеты выпадение герба и надписи

$$\mathbf{P(A+B)} = \frac{m_{1+M_2}}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

2-Определение: Два события называются зависимыми, если вероятность первого события зависит от появления второго события.

Например. Выпадение герба при подбрасывании монеты не зависит от выпадения определенного числа при бросании игральной кости.

3- Определение: Для исхода одного эксперимента может произойти только одно событие из группы.

A1, A2, ...Aп. (1) система событий называется полной группой событий.

2- теорема: Сумма вероятностей событий полной группы равна 1.

Доказательство. Для нахождения полной группы событий A1+ A2+ ....+Aп=D истинно, а события этой группы попарно несовместимы.

$$P(A_1+ A_2+ ....+A_п) = P(A_1) + P(A_2) + ...+P(A_п) \qquad (2)$$

$$P(A_1+ A_2+ ....+A_п) = P(D) = 1 \quad P(A_1) + P(A_2) + ...+P(A_п) = 1$$

Произведение независимых вероятностей.

Теорема: Вероятность одновременного наступления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(AB) = P(A)^* P(B)$$

Пример: Если бросить игральную кость и монету, какова вероятность выпадения герба на монете и числа 5 на игральной кости?

Решение: вероятность выпадения герба на монете и числа 5 на игральной кости. Тогда по теореме 3 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

$$P(AB) = P(A) * P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

Пример: Какова вероятность выпадения герба 10 раз при подбрасывании монеты 10 раз?
Решение: При каждом подбрасывании выпадение герба не зависит от предыдущего результата. Поэтому здесь речь идет о совпадении 10 несовместимых событий. Вероятность выпадения герба при одном подбрасывании монеты равна 1/2.

Поэтому искомая вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, $\frac{1}{1024}$

Определение: Зависимыми событиями называются события, при которых выполнение одного события зависит от другого события.
Определение: Условной вероятностью PA(B) называется вероятность события B, определенная после того, как событие A не произошло.
Теорема: Вероятность выполнения двух зависимых событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго события после выполнения первого события.

$$P(AB) = P(A) * PA(B)$$

Эта теорема зависит $\mathbf{P(ABC) = P(A) * P_A(B) * P_{AB}(C)}$

1. 5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новой темы. 25 мин
- Что такое совместное событие?
- Что такое несовместное событие?
- Что такое зависимое событие?
- Что такое случайное событие?

1.6. Приложение 1

1.7.Контрольные задания: 30 мин

Пример.Цель (I) состоит из круглого и двух концентрических колец (II и III). Вероятности попадания в зоны I, II и III соответственно равны 0,45; 0,30; 0,15. Определите вероятность попадания в цель.
Пример.На заочную форму обучения университета поступают контрольные работы из городов A, B и C. Вероятность того, что работа поступит из города A, равна 0,6; из города B — 0,1. Найдите вероятность того, что работа поступит из города C.
Пример. Два игральных кубика подбрасываются. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел превышает пять?

Подведение итогов занятия: 10 мин
- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания.

Занятие № 27

1.1. Тема урока: Элементы математической статистики.
Количество часов: 2 **90 мин**

1.2. Цель урока:
- обучение: Познакомить учащихся с элементами случайной величины, методами отбора и научить применять числовые характеристики случайной величины при решении задач по выборкам.

• воспитание: Формирование у учащихся навыков достижения определенных результатов.

1.3 Задача урока: формирование навыков применения полученных знаний по теме при решении задач.

Организационный этап: 5 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Случайная величина, элементы методов отбора.

• Дискретные и интервальные вариационные ряды.

• Числовые характеристики случайной величины

Объяснение нового урока: 27 мин

Генеральная совокупность и выборка. Дискретные и интервальные вариационные ряды.

Оценка численных характеристик случайной величины по выборкам.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех рассматриваемых объектов, объединенных общими свойствами. Например. 1. Если взять одно предприятие, то отдельный рабочий будет объектом, а все рабочие предприятия будут генеральной совокупностью.

Для изучения количества телефонных звонков, сделанных студентами, был проведен опрос 25 студентов, обучающихся в группе. Совокупность студентов - генеральная совокупность, 25 студентов, обучающихся в группе - выборка. Совокупность случайно отобранных объектов называется выборкой. Совокупность, к которой относится выборка, называется генеральной совокупностью. Объемом выборки (генеральной

2-мысал. 1, 3, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 3, 4, 4, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 5, 2, 1 сандар қатары берілген. Таңдама көлемін, таңдама варианталарын табыңдар; жиіліктің және салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатарын құрастырыңдар; жиілік полигонын салыңдар.

Шешуі: Таңдама көлемі: n=25.

Варианта	1	2	3	4	5
Варианта жиілігі	6	4	6	5	4
Таңдау көлемі	25	25	25	25	25
Салыстырмалы жиілік	0,24	0,16	0,24	0,2	0,6

Жиіліктің вариациялық қатары төмендегі кесте көрсетілген.

Варианта	1	2	3	4	5
Варианта жиілігі	6	4	6	5	4

Жиілік полигонын саламыз.

совокупности)называется **количество объектов или наблюдений в этой совокупности. Например. Если 1000**

Мысал.

$x_1, x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ қатарын қарастырайық. Мұнда x_1, вариантасы n_1 рет, x_2, вариантасы n_2 рет, x_3 вариантасы n_3 рет берілсін және т.с.с.

Сонда n саны (мұндағы $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$) варианта көлемі болып табылады.

n_i мәні - x_i вариантасының жиілігі, ал $\frac{n_k}{n}$ -салыстырмалы жиіліктің саны.

Төмендегі кесте жиіліктің статистикалық қатарын береді:

Варианта	x_1	x_2	...	x_k
Варианта жиілігі	n_1	n_2	...	n_k

(*)

Салыстырмалы жиілігі берілген вариантаның кестесін құрастыру:

x_i варианта	x_1	x_2	...	x_k
$\frac{n_k}{n}$ салыстырмалы жиілігі	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

(**)

(**) - кестені салыстырмалы жиіліктің вариациялық қатары деп аталады.

Вариация размера обозначает абсолютные и относительные показатели, показывающие отклонение признака. Коэффициент вариации — это сравнительный показатель изменчивости вариационного ряда. Коэффициент вариации (С) — это отношение среднего квадратичного отклонения к средней арифметической в процентах: Вариационный диапазон — это различие между наибольшим и наименьшим значением признака. Для исследования вариаций в совокупности их записывают в виде вариационных рядов. Самая часто встречающаяся варианта в вариационном ряду называется модой. Варианта, расположенного в середине вариационного ряда, называется медианой.

1.5. Иллюстрированные материалы: работа с учебником.
Закрепление новой темы. 9 мин

- Что такое генеральная совокупность и выборка?
- Почему мы называем это мерой вариации?
- Свойства дисперсии.

1.6. Приложение 1
1.7. Контрольные задачи: 31 мин

Пример. Конструкция состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в каждом испытании равна 0,1. Напишите закон распределения числа X отказавших элементов в этом испытании.

Пример. В городе есть 4 коммерческих банка. Риск банкротства каждого из них в течение одного года составляет 20%. Составьте закон распределения числа банков, которые обанкротятся в следующем году.

Пример. Контрольная работа состоит из 3 вопросов. Для каждого вопроса дается 4 варианта ответа, один из которых правильный. Напишите закон распределения числа правильных ответов по простому предположению. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Пример. Напишите закон распределения случайной величины X – числа появлений «орла» при бросании монеты два раза.

Подведение итогов занятия: 4 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания

Занятие № 28

1.1. Тема урока: Случайные величины.

Количество часов: 3 **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучающая: Познакомить обучающихся со случайной величиной, элементами методов выбора и научить применять числовые характеристики случайной величины при решении задач по выборкам.

• воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата.

1.3 Задача урока: сформировать навыки решения задач на основе полученных знаний по теме.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

Объяснение нового урока: 40 мин.

Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Виды распределений дискретных случайных величин.

Случайная величина, элементы методов выбора.

Определение: Однозначную величину, значение которой заранее неизвестно, а определяется только в результате опыта, называют случайной величиной.

В результате проведения опыта может произойти или не произойти событие А. Если событие А произошло, то оно равно 1. В противном случае – равно 0. Рассмотрим случайную величину X любого события А.

Определение: Случайную величину, значениями которой являются отдельные конечные числа, называют дискретной случайной величиной.

Определение: Случайную величину, значения которой непрерывно расположены на определенном отрезке (где $a < b$, a и b – фиксированные действительные числа), называют непрерывной.

X	x_1	x_2	....	$x_п$
P	p_1	p_2	....	$p_п$

В первой строке таблицы указаны все возможные значения случайной величины, а во второй — их вероятности.
Пример: Выпущено 100 лотерейных билетов. 40 билетов приносят владельцу 50 тенге, 10 билетов — 250 тенге, 5 билетов — 500 тенге, а остальные билеты — без выигрыша. Каков средний выигрыш на один билет?
Решение: Пусть значения случайной величины X — 0; 50; 250; 500 тенге, тогда их вероятности соответствуют $\frac{45}{100};\frac{40}{100};\frac{10}{100};\frac{5}{100}$.

Таблица:

X	0	50	250	500
P	0,45	0,4	0,1	0,05

Например, если какой-либо игрок купит все 100 билетов, он выиграл бы 7000 тенге.
Средний выигрыш за один билет составляет 70 тенге (потому что 7000/100=70),
тогда (0*45+50*40+250*10+500*5)/100=0*0,45+50*0,4+250*0,1+500*0,05

Ответ: 70 тенге.

Определение: Значение случайной величины X, равное сумме произведений возможных значений на их соответствующие вероятности, называется математическим ожиданием случайной величины X. Обозначается как M(X).

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_{n-1} p_{n-1} + x_n p_n$$

Пример. При сборке инструмента для подготовки необходимой детали в зависимости от ситуации используются образцы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0,05	0,08	0,09	0,1	0,3	0,2	0,12	0,06

Каково среднее значение количества образцов, используемых для сбора 20 инструментов?
Решение. Чтобы определить среднее значение образцов, используемых для сбора 20 инструментов, сначала определим среднее значение, необходимое для одного инструмента, затем умножим на 20.
M(X) = 1*0,05+0,08+3*0,09+4*0,1+5*0,3+6*0,2+7*0,12+8*0,06= 4,9
Тогда, 4,9*20= 98 Ответ. 98
Пример. В пруду около 10000 рыб, из них 500 карпов, из пруда выловили 120 рыб. Определите математическое ожидание вероятности появления карпа среди выловленных рыб.

Решение. Вероятность появления карпа: $P = \frac{500}{10000} = 0.05$ Пойманные 120 рыб могут быть 0;1;2; ......; 120 сазанов. По схеме Бернулли математическое ожидание будет 120*0,05= 6.
Свойства математического ожидания.
1. Если C – постоянная, то M(C) = C, M (CX) = CM (X)
2. Если X,Y,Z – случайные величины, то
M (X+ Y +Z) =M(X)+M(Y)+ M(Z) будет.

1.5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 25 мин

- Что такое случайная величина?
- Что такое математическое ожидание?
- Свойства дисперсии.
- Свойства математического ожидания.

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 30 мин

Пример. Мишень (I) состоит из трех концентрических кругов: круг (I) и два кольца (II и III). Вероятности попадания в области I, II и III соответственно равны 0,45; 0,30; 0,15. Определите вероятность попадания в мишень.

Пример. Контрольные работы для заочного отделения университета поступают из городов А, В и С. Вероятность поступления из города А равна 0,6; вероятность поступления из города В равна 0,1. Найдите вероятность поступления очередной работы из города С.

Пример. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел больше пяти?

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины Х задан в следующей таблице.

X	4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины Х, заданной законом распределения в таблице**:**

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

X	131	140	160	180
p	0,0,5	0,10	0,25	0,60

Подведение итогов занятия: 10 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания

Занятие № 29

1.1. Тема урока: Случайные величины.

Количество часов: 3 **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучающая: Познакомить обучающихся со случайной величиной, элементами методов выбора и научить применять числовые характеристики случайной величины при решении задач по выборкам.

• воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата.

1.3 Задача урока: сформировать навыки решения задач на основе полученных знаний по теме.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

Объяснение нового урока: 40 мин

Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Виды распределений дискретных случайных величин.

Определение: Отклонение Х случайной величины от математического ожидания М(Х), то есть Х- М(Х) называется отклонением.

Х- М(Х) – отклонение и его квадрат (Х-М(Х))2 являются случайными величинами.

Определение: Математическое ожидание второй степени отклонения называется дисперсией случайной величины X. Обозначается как D (X).

D (X) =M [X-M(X)]

Если C- постоянна, то D (C) = 0, D (CX) = C2 D (X);

1. D (X) = M(X2) - M2(X)

2. Если X и У — случайные величины, то D (X + Y) = D (X) + D (Y)

Пример. Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения. Найдите дисперсию случайной величины.

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Решение: Сначала вычисляем математическое ожидание M (X), затем M (X2)

M(X) = 0*0,2 + 1*0,4 + 2*0,3 + 3*0,08 + 4*0,02 = 1,32

M(X2) = 0*0,2 + 1*0,4 + 4*0,3 + 9*0,08 + 16*0,02 = 2,64

По формуле: D (X) = M(X2) - M^2(X) = 2,64 - 1,7424 = 0,8976

Ответ: 0,8976

Определение: Корень из дисперсии называется среднеквадратическим отклонением. Обозначается как σ(X).

По определению, среднеквадратическое отклонение. $\sigma(X) = \sqrt{D(x)}$

Пример: результаты, полученные после измерения контроля чайных пакетиков, представлены в следующей таблице.

Вес	49,0	49,5	50,5	50,0	51,0
Количество проверенных пакетов.	10	30	45	10	5

Найдите математическую ожидаемость, дисперсию и среднеквадратическое отклонение пакета.

Решение. Общее число проверенных пакетов – 100. Согласно определению вероятности, соответствующие вероятности значений X, приведённые в таблице: 0,1; 0,3; 0,45; 0,1; 0,05.

Тогда, M(X) =49*0,1+49,5*0,3+50*0,45+50,5*0,1+51*0,05= 49,85

$M(X^2) = 49^2*0,1+49,5^2*0,3+50^2*0,45+50,5^2*0,1+51^2*0,05=2485,25$

$M(X)^2=2485,0,225$

$D(X) = M(X^2)- M(X)^2=0,2275$

$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = 0,47697$

M(X) =49,85; D (X) =0,2275; σ(X) =0,477 Ответ : 49,85; 0,2275; 0,477

№ 1.Два стрелка стреляют в одну мишень. Вероятность попадания первого стрелка – 0,9, а второго – 0,8. Какая вероятность того, что оба стрелка попадут в мишень?

№ 2.В ящике 4 белых и 7 чёрных шаров. Из ящика без возвращения вытаскивают два шара по очереди. Какая вероятность того, что первый шар белый, а второй чёрный?

1.5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 25 мин

• Что такое случайная величина?
• Что такое математическое ожидание?
• Свойства дисперсии.
• Свойства математического ожидания.

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 30 мин

Пример. Мишень (I) состоит из трех концентрических кругов: круг (I) и два кольца (II и III). Вероятности попадания в области I, II и III соответственно равны 0,45; 0,30; 0,15. Определите вероятность попадания в мишень.

Пример. Контрольные работы для заочного отделения университета поступают из городов A, B и C. Вероятность поступления из города A равна 0,6; вероятность поступления из города B равна 0,1. Найдите вероятность поступления очередной работы из города C.

Пример. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел больше пяти?

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан в следующей таблице.

X	4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

X	0,21	0,54	0,61
p	0,1	0,5	0,4

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения в таблице**:**

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

X	131	140	160	180
p	0,0,5	0,10	0,25	0,60

Подведение итогов занятия: 10 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания

Занятие №30

1.1. Тема урока: Аксиомы стереометрии.

Количество часов: 2 ч. 90 мин

1.2. Цель урока:

• обучающая: Объяснить учащимся аксиомы стереометрии, а также показать взаимное расположение прямых.

• воспитательная: Сформировать у учащихся навыки достижения определенного результата.

1.3. Задача урока: сформировать навыки черчения схем по теме.

Организационный этап: 5 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

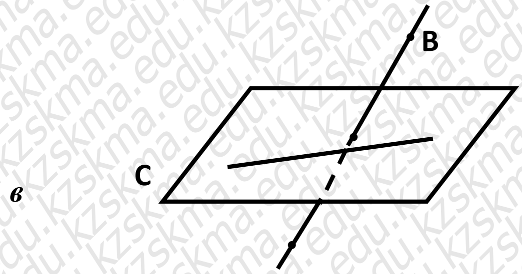
• Расположение плоскостей.

• Аксиомы стереометрии.

Объяснение нового урока: 27 мин

Стереометрии аксиомы и их следствия. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Точка, прямая и плоскость - основные геометрические фигуры в пространстве.



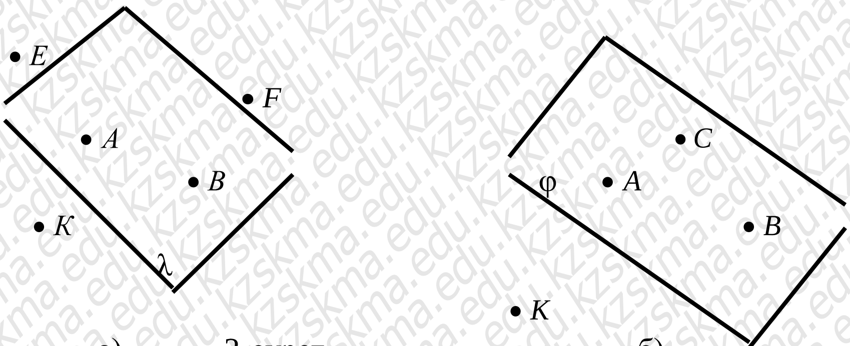
1 - сурет

Плоскости в пространстве обозначаются строчными буквами греческого алфавита: □,□,□. На рисунке 1 изображена плоскость , прямые а и в и точки A, B, C. О точке A и прямой а говорят, что они лежат в плоскости или принадлежат ей. О точках B и C и прямой в говорят, что они не лежат в плоскости или не принадлежат ей.

Введение плоскости - основной геометрической фигуры в пространстве - требует расширения системы аксиом. Отметим основные свойства плоскостей в пространстве.

Аксиома 1. В любой плоскости существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей. (Рисунок 2 (а))

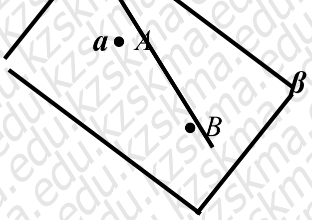
Точка A лежит в плоскости , а точки B и C не лежат в ней.



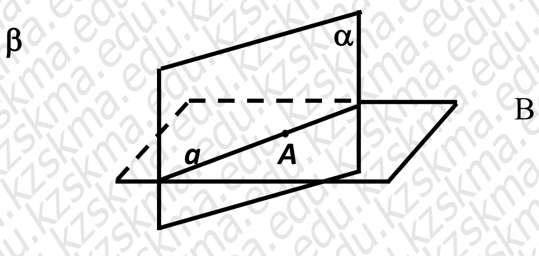
а) 2-сурет б)

Аксиома 2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну плоскость. (рис. 2 (б))

Аксиома 3. Если две точки прямой лежат в плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.



Аксиома 3. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*



В 4-м рисунке плоскости и имеют общую точку А, следовательно, по аксиоме-2 на каждой из этих плоскостей будет существовать прямая. Тогда, если какая-либо точка принадлежит обеим плоскостям, она будет находиться на прямой а. В этом случае плоскости и называются плоскостями, пересекающимися по прямой а.

Эта аксиома дополняет аксиомы планиметрии. Все они составляют систему аксиом геометрии. Используя эти аксиомы, можно доказать первые несколько теорем стереометрии.

Теорема 1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, можно провести только одну плоскость.

Теорема 2. Если две точки прямой находятся в одной плоскости, то вся прямая также находится в этой плоскости.

Теорема 3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость.*

Пример 1. *Дана плоскость . Доказать, что существует прямая, не лежащая в плоскости и пересекающая ее.*

Решение: *Возьмем точку А в плоскости , это возможно по аксиоме 1. По той же аксиоме существует точка В, не лежащая в плоскости . Через точки А и В можно провести прямую. Прямая АВ не лежит в плоскости и пересекает ее (в точке А).*

Параллельные прямые в пространстве и их свойства аналогичны соответствующим определениям и свойствам на плоскости. Кроме того, в пространстве существует еще один случай расположения прямых: это – скрещивающиеся прямые. Не пересекающиеся и не лежащие в одной плоскости прямые называются скрещивающимися.

Скрещивающимся перпендикуляром двух прямых называется отрезок, который перпендикулярен каждой из них, концы которого лежат на этих прямых.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Непересекающиеся, то есть не имеющие общих точек, прямая и плоскость называются параллельными. Если прямая а параллельна плоскости, то это записывается так: .

Теорема 4. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости. (признак параллельности прямой и плоскости).

Параллельность плоскостей. Параллельное проецирование и его свойства.

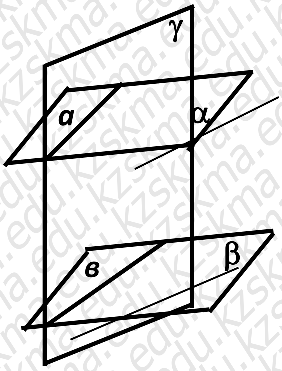
Изучение параллельности двух плоскостей, понятия параллельности плоскостей и параллельного проецирования, свойств проецирования, а также изображения фигур в пространстве на плоскость. Изучение перпендикулярности прямой и плоскости, признака перпендикулярности.

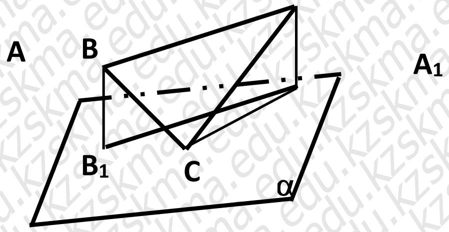
Две непересекающиеся плоскости называются параллельными плоскостями.

Теорема 5. Две плоскости параллельны, если одна из них содержит две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости. (признак параллельности двух плоскостей).

Теорема 6. Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной плоскости.

Теорема 7. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.





Теорема 8. *Параллельные отрезки между двумя параллельными плоскостями равны друг другу.*

Прямая, пересекающая плоскость, если она перпендикулярна любой прямой, проходящей через точку пересечения с этой плоскостью, называется перпендикуляром к этой плоскости.

1.5. Иллюстрированные материалы: работа с учебником.

Закрепление нового материала. 9 мин

- Что такое стереометрия?
- Сколько аксиом у стереометрии?
- Какие фигуры считаются основными?
- Почему мы называем плоскость?
- Какими буквами обозначаются точки?

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задачи: 31 мин

Изобразите следующие ситуации на чертеже.

1) Прямые a и b проходят через точку A, лежащую в плоскости α;

2) Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b не лежит в плоскости α.

Пример 1. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости, докажите, что любые три из них не лежат на одной прямой.

Пример 2. Даны три точки, соединенные отрезками попарно, необходимо доказать, что отрезки лежат в одной плоскости.

Пример 3. Три прямые проходят через одну точку, через каждые две из них проведена плоскость, сколько всего проведено плоскостей?

Пример 4. Если две точки окружности лежат в плоскости, то лежит ли окружность полностью в этой плоскости?

Подведение итогов занятия: 4 мин

- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Занятие №31

1.1. Тема урока: Углы в пространстве.

Количество часов: 3 часа. **135 мин**

1.2. Цель урока:

- обучающая: Научить учащихся применять формулу вычисления ортогональной проекции плоской фигуры на плоскость и ее площадь при решении задач.
- воспитательная: Формирование у учащихся навыков достижения определенного результата.

1.3 Задача урока: сформировать навыки черчения по теме на основе полученных знаний.

Организационный этап: 10 мин

- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 20 мин

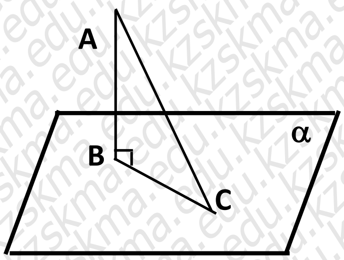
1.4. Основные вопросы темы:

- понимание того, что ортогональная проекция является видом параллельной проекции;
- знание и понимание свойств ортогональной проекции;
- ортогональная

Объяснение нового урока: 40 мин

Угол между линиями в пространстве. Перпендикуляр и наклонная. Перпендикулярность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах.

Перпендикуляр, проведенный из заданной точки к заданной плоскости, называется отрезком, соединяющим точку этой плоскости с точкой, в которую перпендикуляр, проведенный из данной точки, падает на плоскость. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра. Расстояние от точки до плоскости называется длиной перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости. Наклонной, проведенной из заданной точки к заданной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий эту точку с точкой в плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной. Отрезок, соединяющий единственную перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, с основанием наклонной, называется наклонной..



На рисунке 5 из точки A проведены перпендикуляр AB к плоскости и наклонная AC. Точка B – основание перпендикуляра, точка C – основание наклонной, BC – проекция наклонной AC на плоскость .

Теорема 1. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно: если прямая в плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость (о трех перпендикулярах).

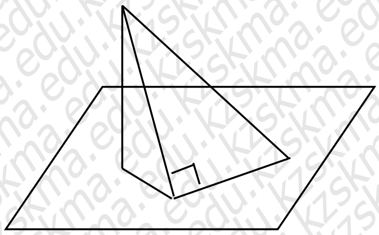
Теорема 1. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны. (признак перпендикулярности плоскостей).

На рисунке 3 плоскость проходит через прямую, то есть по теореме 2 плоскости и перпендикулярны.

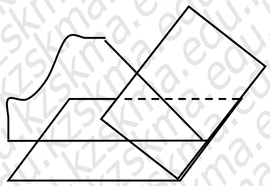
Теорема 3. Если прямая лежит в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярна прямой их пересечения, то эта прямая перпендикулярна обеим плоскостям.

Фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую ограничивающую прямую, называется двугранным углом.

Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а ограничивающая их прямая — ребром.



4



5

На рисунке 5 изображены двусторонний угол, у которого есть вершина, стороны и полупространства. Перпендикулярная плоскость к стороне двустороннего угла проводит через нее две полупрямые, исходящие из общей точки. Угол, образованный этими двумя полупрямыми, называется линейным углом двустороннего угла. Размер двустороннего угла принимается равным размеру соответствующего линейного угла. Если провести перпендикулярную плоскость к стороне а двустороннего угла через точку А, то она и его стороны пересекаются с полупрямыми, проведенными по линиям с и d (см. рисунок 5). — это линейный угол данного двустороннего угла. Градусная мера этого угла равна градусной мере двустороннего угла. Размер двустороннего угла зависит от выбора линейного угла.

1. 5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новой темы. 25 мин

- Вопросы по новой теме:
- Ортографическое проецирование.
- Что такое перпендикуляр и наклонная?
- Угол между прямой и плоскостью**.**

1.6. Приложение 1

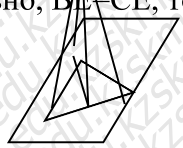
1.7. Контрольные работы: 30 мин

Пример 2. Треугольник ABC, лежащий в плоскости, где один из углов — прямой, и сторона AC — катет, образует с плоскостью угол, равный 45°. Если AC=20 см и отношение AB:BC=3:1, необходимо найти расстояние от вершины B до плоскости.

Решение: Согласно условию, AB:BC=3:1, AC=20 см, поэтому обозначим BC как x, а AB как 3x. Используя теорему Пифагора, получаем уравнение:

Отсюда, то есть. Проведем перпендикуляр к точке B, опустим его на плоскость, обозначим точку пересечения как E, соединяем E и C. Согласно теореме о перпендикулярах к плоскости, так как. Следовательно, BE=CE, то есть, откуда

Подведение итогов занятия: 10 мин



- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Занятие №32

1.1. Тема урока: Векторы в пространстве.

Количество часов: 3 часа **135 мин**

1.2. Цель урока:

- обучение: научить обучающихся формулам длины вектора, угла между векторами и расстояния между двумя точками.
- воспитание: формировать навыки достижения определенного результата.

1.3. Задача урока: развивать навыки применения полученных знаний по теме в своей профессиональной деятельности.

Организационный этап: 10 мин

- организация рабочего пространства урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

- Векторы в пространстве.
- Коллинеарные и компланарные векторы.
- Система прямоугольных координат в пространстве.

Объяснение нового материала: 40 мин.

Векторы в пространстве и операции с ними. Коллинеарные и компланарные векторы. Прямоугольная система координат в пространстве.

Определение: Называется направленный отрезок вектором. Вектор, заданный несовпадающими точками А и В, обозначается символом $\vec{AB}$. Точка А обозначается началом вектора, а точка В - концом вектора..

Определение: Расстояние между точками А и В называется длиной или модулем вектора и обозначается следующим образом. $\left|\vec{AB}\right|$ **Вообще,** $\vec{AB}$ **векторы можно обозначать строчными латинскими буквами, то есть** $\vec{a}, \vec{в}, ..., \vec{x}$

Определение: Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то он называется нулевым вектором. $\vec{AB}$ **Сумма двух противоположных векторов, модули которых равны, называется нулевым вектором** $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = 0$ **.**

Определение: Расстояние между точками А и В называется длиной или модулем вектора и обозначается следующим образом. Вообще векторы можно обозначать строчными латинскими буквами, то есть

Определение: Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то он называется нулевым вектором. Сумма двух противоположных векторов с равными модулями называется нулевым вектором. $\left(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{в}\right)$ Два вектора, направленные в противоположные стороны, называются противоположными векторами и обозначаются следующим образом. $\left(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{в}\right)$

Определение: два вектора, имеющие одинаковое направление и равные модули, называются равными векторами и обозначаются так: $\vec{a} = \vec{в}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{в}$ и $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{d}\right|$, $\vec{a} = \vec{d}$

Классификация векторов.

Определение. Если три вектора, изображающие направленные отрезки, лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости, то они называются компланарными векторами.

Определение. Если три вектора, изображающие направленные отрезки, не лежат в одной плоскости или не параллельны одной плоскости, то они называются некопланарными векторами.

1. 5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новой темы. 25 мин

- Что такое вектор?
- Какие виды векторов существуют?
- Применение операций к векторам.
- Что такое длина вектора?

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 30 мин

Пример:

1) Сколько различных векторов образуют стороны параллелограмма? Начертите схему.
2) Начертите векторы в пространстве. A= (1,1,1) A= (3,2,1) A= (-3,-2,4)
B=(0,0,0) B=(0,0,0) B=(0,0,0) C=(1,2,3)
3) В треугольной призме ABCA1B1C1 покажите векторы, равные вектору AA1, через вершины.

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Заниятие 33

1.2. Тема урока: Перпендикулярность плоскостей.

Количество часов: 2 ч. **90 мин**

1.2. Цель урока:

- обучающая: Научить учащихся применять формулу вычисления ортогональной проекции плоской фигуры на плоскость и ее площадь при решении задач.
- воспитательная: Формирование у учащихся навыков достижения определенного результата.

1.3 Задача урока: сформировать навыки черчения по теме на основе полученных знаний.

Организационный этап: 5 мин

- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные вопросы темы:

- понимание того, что ортогональная проекция является видом параллельной проекции;
- знание и понимание свойств ортогональной проекции;
- ортогональная

Объяснение нового урока: 27 мин

Ортогональная проекция плоской фигуры на плоскость и ее площадь. Применение перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве в задачах технико-технологического направления.

Проецирование — это процесс нанесения изображения предмета на плоскость (на бумагу, экран, тетрадь). В этом случае полученное изображение называется проекцией. Слово «Проекция» происходит от латинского слова, означающего «бросание вперед». Например, если разместить перед электрической лампой какой-либо предмет, то тень этого предмета на стене можно назвать его проекцией.

Для изображения пространственных фигур на плоскости используют параллельное проецирование.Этот способ изображения фигуры: пусть в пространстве дана фигура F и плоскость α, а также выбирается прямая l, пересекающая α. От каждой точки фигуры F проводят параллельные ей линии к прямой l. Когда эти линии пересекаются с плоскостью π, получается фигура F' — проекция фигуры F.Проекция плоской фигуры F, полученной параллельным проецированием на линию l, на плоскость π называется проекцией фигуры F.

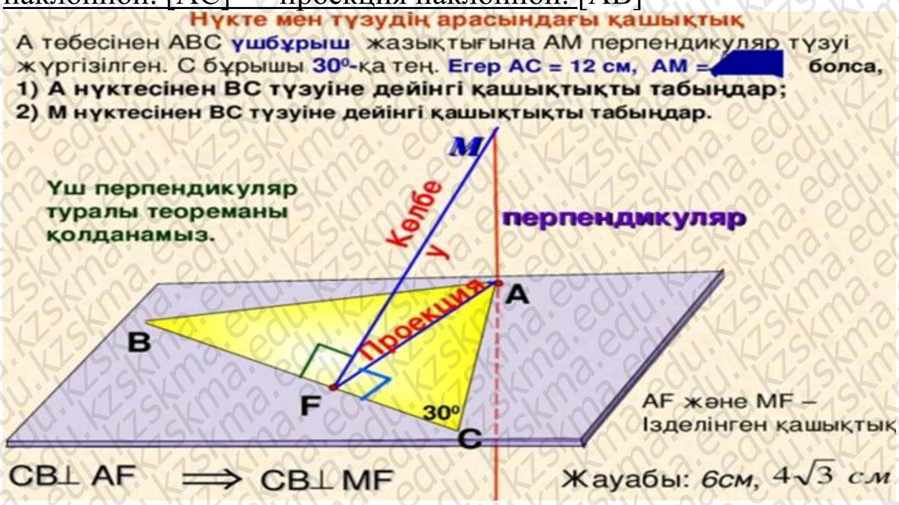
Справка. *Проекция, осуществляемая перпендикулярно к плоскости проекции, называется ортогональной проекцией. Так как ортогональная проекция является одним из видов параллельной проекции, она обладает всеми свойствами параллельной проекции. Прямоугольная проекция (ортогональная проекция) — это один из видов параллельной проекции.*

Определение. Перпендикуляр, проведенный из заданной точки к заданной плоскости, — это отрезок, соединяющий данную точку и плоскость, лежащий на перпендикулярной к этой плоскости прямой.

Определение. Отрезок, один конец которого лежит в плоскости и который не является перпендикулярным к ней, называется наклонным к плоскости.

[BC] — наклонный, точка C — основание наклонной.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, называется проекцией наклонной. [AC] — проекция наклонной. [AB] -



1. 5. Иллюстративные материалы: презентация

Закрепление новой темы. 9 мин

- Вопросы по новой теме:

- Ортографическое проецирование.
- Что такое перпендикуляр и наклонная?
- Угол между прямой и плоскостью.

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные работы: 31 мин

Пример 2. Треугольник ABC, лежащий в плоскости, где один из углов — прямой, и сторона AC — катет, образует с плоскостью угол, равный 45°. Если AC=20 см и отношение AB:BC=3:1, необходимо найти расстояние от вершины B до плоскости.

Решение: Согласно условию, AB:BC=3:1, AC=20 см, поэтому обозначим BC как x, а AB как 3x. Используя теорему Пифагора, получаем уравнение:

Отсюда, то есть. Проведем перпендикуляр к точке B, опустим его на плоскость, обозначим точку пересечения как E, соединяем E и C. Согласно теореме о перпендикулярах к плоскости, так как. Следовательно, BE=CE, то есть, откуда

Подведение итогов занятия: 4 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания

Занятие №34

1.1. Тема урока: Координаты вектора в пространстве.

Количество часов: 3 часа. **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучение: Научить учащихся формулам сложения и вычитания векторов, заданных координатами, умножения вектора, заданного координатами, на число.

• воспитательная: Формирование у учащихся навыков достижения определенных результатов.

1.3. Задача урока: Развитие навыков применения полученных знаний по теме в своей специальности.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Применение операций к векторам.

• Умножение вектора, заданного координатами, на число.

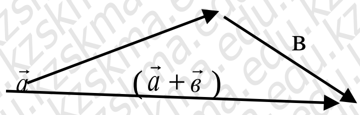
• Прямоугольная система координат в пространстве.

Объяснение нового урока: 40

Сложение и вычитание векторов по их координатам, умножение вектора на число. Применение операций к векторам.

Определение: Суммой векторов $\vec{a}$ (a_1,a_2,a_3) **и** $\vec{в}$ (b_1,b_2,b_3) **называется вектор + с координатами (a1+ b1, a2+ b2, a3+ b3). Для каждого вектора выполняются следующие равенства.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

1. $\vec{a}+\vec{в}=\vec{в}+\vec{a}$ (Переместительный закон сложения)
2. $\vec{a}+\vec{в}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{в}\right)+\vec{c}=a+\left(\vec{в}+\vec{c}\right)$ (закон ассоциативности сложения)



Анықтама: мен векторларының айырымы деп $\vec{в}$ векторымен қосылып $\vec{a}$ векторын беретін үшінші бір $\vec{c}$ векторын айтады. $\vec{a}$ (a_1,a_2,a_3) және $\vec{в}$ (b_1,b_2,b_3) болса, онда
(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3), $\vec{a} - \vec{в} = \vec{c}$
Определение: $\vec{a}$ и $\vec{в}$ разностью векторов и называется такой третий вектор , который в сумме с вектором дает вектор . Если $\vec{a}$ (a_1,a_2,a_3)и $\vec{в}$ (b_1,b_2,b_3), то
(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3), $\vec{a} - \vec{в} = \vec{c}$
Векторы $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{в}$ называются суммой и разностью, если $\vec{c} + \vec{в} = \vec{a}$. $\vec{a}$ Чтобы вычесть вектор из вектора , $\vec{в}$ достаточно к вектору прибавить противоположный вектор $\vec{a} - \vec{в} = \vec{a} + \left(-\vec{в}\right)$, то есть

Определение: Произведением вектора (а1,а2,а3) на число к называется вектор к.
$к \cdot \vec{a} = \left(к \cdot a_1 к \cdot a_2 к \cdot a_3\right)$ мы говорим о векторах.

$к \cdot \left(\vec{a} + \vec{ъ}\right) = к \cdot \vec{a} + к \cdot \vec{ъ}$

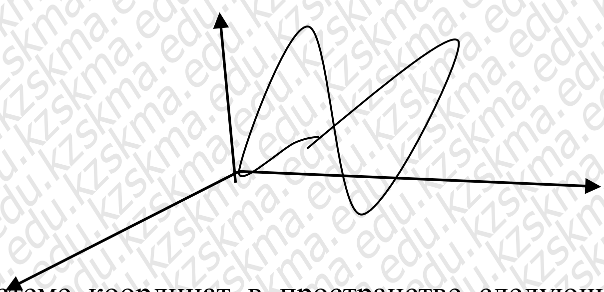
здесь

$\left(м + n\right) \cdot \vec{a} = м \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}$

1.5. Иллюстративные материалы: презентация
Закрепление новой темы. 25 мин
- Какова формула длины радиус-вектора?
- Что такое скалярное произведение двух векторов?
- Назовите основные свойства скалярного произведения.
- По какой формуле можно определить угол между двумя векторами?

1.6. Приложение 1.
1.7. Контрольные задания: 30 мин
Теорема: Параллельный перенос, перемещающий начало координат в точку А(а1,а2,а3), переводит любую точку Х(х,у,z) в точку Х1(х+а1,у+а2, z+а3).
Доказательство: Вектор ХХ1 = вектору ОА, поэтому точки О, А, Х,Х1 являются вершинами параллелограмма или все лежат на одной прямой. В обоих случаях середина отрезка АХ совпадает с серединой отрезка ОХ1. Пусть координаты точки Х1 будут х1,у1,z1.
Тогда отсюда

$$\frac{a_1 + x}{2} = \frac{0 + x_1}{2} \qquad \frac{a_2 + y}{2} = \frac{0 + y_1}{2} \qquad \frac{a_3 + z}{2} = \frac{0 + z_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x + a_1 \quad y_1 = y + a_2 \quad z_1 = z + a_3$$



Пример: Изобразите в прямоугольной системе координат в пространстве следующие точки, заданные координатами: (1,2,3); (2,-1,1);(-1,3,2).
Подведение итогов занятия: **10 мин**
- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Занятие №35

1.1. Тема урока: Скалярное произведение векторов.

Количество часов: 3 часа. **135 мин**

1.2. Цель урока:

- обучение: Научить учащихся складывать и вычитать векторы, заданные координатами, умножать вектор, заданный координатами, на число.
- воспитательная: Формирование у учащихся навыков достижения определенных результатов.

1.3. Задача урока: Развитие навыков применения полученных знаний по теме в своей специальности.

Организационный этап: 10 мин

- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний учащихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

- Применение операций к векторам.
- Умножение вектора, заданного координатами, на число.
- Скалярное произведение векторов.

Объяснение нового материала: 40 мин

Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка.

Скалярное произведение двух векторов.

Определение. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$ обозначается символом. Поэтому? По определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

Основными свойствами скалярного произведения являются:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативный закон)
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)
3. $m(\vec{a}\cdot\vec{b})=(m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}(m\cdot\vec{b})$ (ассоцативный закон)

Определение. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ скалярное произведение $\vec{a}$ на а называется скалярным квадратом вектора а,его длина равна $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$

Необходимые и достаточные условия перпендикулярности двух: $\vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0;\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Условие коллинеарности двух векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}$, где знак плюс соответствует $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ал знак минус соответствует случаю. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ =(x_1,y_1) и $\vec{b}$ =(x_2,y_2) равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$, а в пространстве вычисляется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$

$\vec{a}$=(x1,y1) и $\vec{b}$=(x2,y2) **угол между вектороми** $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ вычисляется по формуле $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ здесь $\vec{a}$=(x1,y1,z1) и $\vec{b}$=(x2,y2,z2)

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$ или в пространстве $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$

$\vec{a}$=(x,y) длина радиус-вектора $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$ пространстве определяется, найдена формула по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\vec{a}=A\vec{B}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$ длина радиус- вычисляется по формулы, а в пространстве $|A\vec{B}|=|AB|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$. С помощью этой формулы можно вычислить рассояние $|A\vec{B}|=|AB|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

$\vec{a}=A\vec{B}$ Углы, образуемые вектором с координатными осями ОХ и ОУ, можно найти по следующей формуле: $\cos\alpha=\dfrac{x_B-x_A}{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$; $\cos\beta=\dfrac{y_B-y_A}{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}$.

1.5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.
Закрепление новой темы. 25 мин
• Какова формула длины радиус-вектора?
• Что такое скалярное произведение двух векторов?
• Назовите основные свойства скалярного произведения.
• Как определить угол между двумя векторами с помощью какой формулы?
1.6. Приложение 1
1.7. Контрольные задания: 30 мин

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$

Пример: ABCDA1B1C1D1 Найдите скалярное произведение следующих векторов в единичном кубе. **A)** $\vec{A}\vec{C}ж\ /\ e\vec{B}_1\vec{D}_1$ Ә) $\vec{A}\vec{B}ж\ /\ e\vec{B}_1\vec{C}_1$ б) $\vec{A}\ \vec{B}_1ж\ /\ e\vec{B}\vec{C}_1$

Пример: $\vec{a}_1(-1,2,3)\vec{a}_2(2,-1,4)$ найдите скалярные произведения векторов.

Пример: $\vec{a}_1(-1,2,2)\vec{a}_2(3,0,4)$ найдите угол между векторами

Подведение итогов занятия: 10 мин
• Оценка знаний учащихся.
• Выдача домашнего задания

Занятие №36

1.1. Тема урока: Многогранники.
Время: 2 ч. 90 мин
1.2. Цель урока:

• обучение: Ознакомить обучающихся с понятием трехугольных и многогранных углов, а также с выпуклыми и невыпуклыми многогранными углами.
• воспитательная: Формировать навыки достижения определенного результата у обучающихся.

1.3. Задача урока: развивать навыки применения полученных знаний по теме в профессиональной деятельности.

Организационный этап: 5 мин

• организация рабочего пространства урока
• определение целей и задач урока

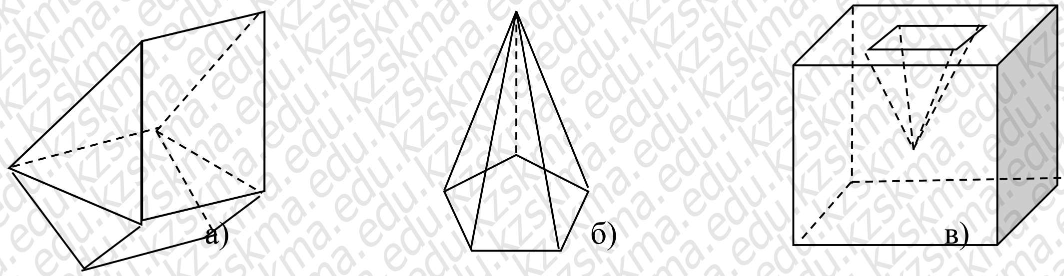
Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 14 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Понятие о многогранниках.
• Многогранный угол, понятие о геометрическом теле.

Объяснение нового материала: 27 мин.

Многогранный угол, понятие о геометрическом теле. Понятие о многогранниках. Правильные многогранники



1

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 1).

Если многогранник расположен по одну сторону от плоскости каждого многоугольника, составляющего его поверхность, то он называется выпуклым многогранником (рис. 1, а, б). Общая часть плоскости и поверхности многогранника называется гранью многогранника. Грани выпуклого многогранника — выпуклые многоугольники.

Стороны граней называются ребрами многогранника, а вершины — вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

1. 5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 9 мин

• Что такое многогранники?
• Что такое выпуклый многогранник?
• Понятие о геометрическом теле

1.6.Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 31 мин

Пример: Нарисуйте схему многоугольников, у которых стороны равны, и укажите, сколько у них вершин и сторон.

Подведение итогов занятия: **4 мин**
- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Занятие №37

1.1. Тема урока: Призма и ее элементы.
Количество часов: 3 ч.. **135 мин**

1.2. Цель урока:
- обучающая: Познакомить обучающихся с призмой и ее элементами, научить находить формулы площади боковой и полной поверхностей.
- воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата.

1.3. Задача урока: развитие навыков применения полученных знаний по теме в специальностях.

Организационный этап: 10 мин
- организация рабочей среды урока
- определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:
- Параллелепипед и его свойства.
- Призма и ее элементы.
- Площадь боковой и полной поверхностей призмы.

Объяснение нового урока: 40 мин.

Призма, прямоугольный параллелепипед и их свойства. Куб. Площадь боковой и полной поверхности призмы. Параллелепипед и его свойства.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется параллелепипедом. Все грани параллелепипеда – параллелограммы.

На рисунке 3 изображен наклонный параллелепипед.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противоположными гранями.

Можно доказать некоторые свойства параллелепипеда.

Теорема 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

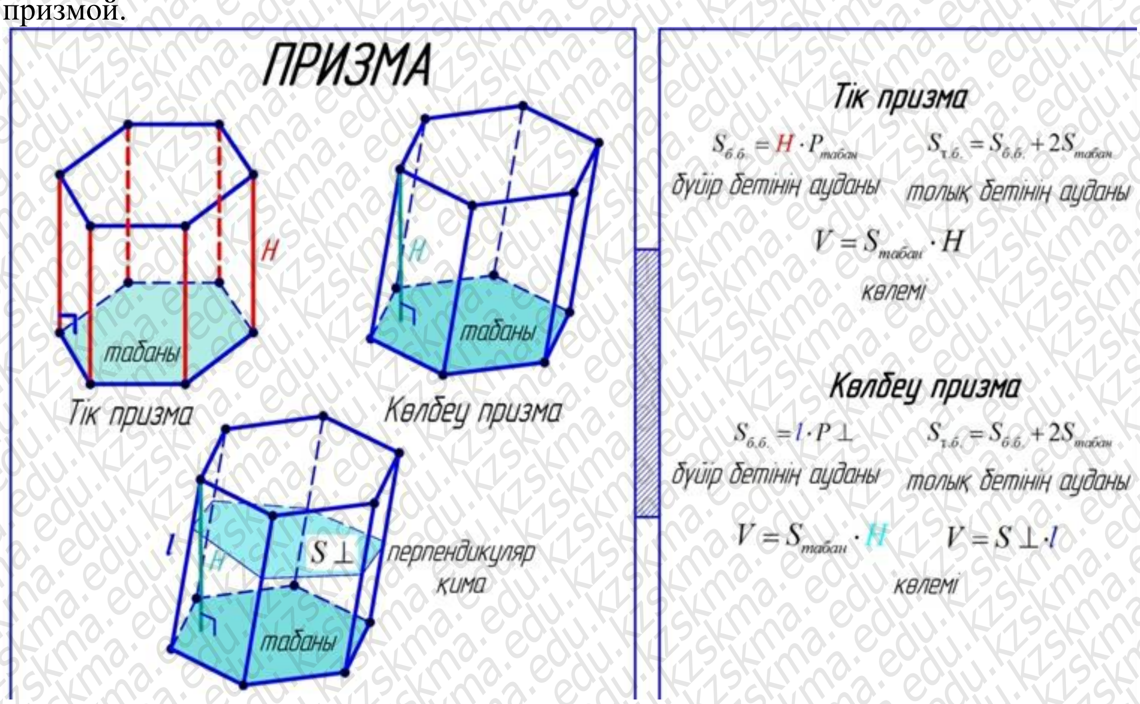
Теорема 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии. Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется кубом.

Многогранник, составленный из двух плоских многоугольников, которые можно совместить параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки, называется призмой. Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, называются боковыми ребрами призмы.

Плоские многоугольники ABCD и A1B1C1D1 могут быть совмещены с помощью соответствующего параллельного переноса и являются основаниями призмы, а отрезки AA1, BB1, CC1 и DD1 являются боковыми ребрами призмы. Основания ABCD и A1B1C1D1 призмы равны, а боковые ребра AA1, BB1, CC1 и DD1 параллельны и равны между собой. Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов. Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов ABB1A1, BCC1B1, ADD1A1 и DCC1D1. Полная поверхность призмы состоит из оснований ABCD и A1B1C1D1 и вышеупомянутых параллелограммов. Основание призмы – это расстояние между основаниями призмы. Линия, соединяющая две вершины, не лежащие на одной грани, называется диагональю призмы. Сечение призмы плоскостью, проходящей через две боковые грани, не лежащие на одной грани, называется диагональным сечением призмы. На рисунке 3 изображена призма ABCDA1B1C1D1, B1K – ее высота, D1B – одна из ее диагоналей. Сечение ACC1A1 является одним из диагональных сечений этой призмы.

Призма, у которой боковые грани перпендикулярны к основанию, называется прямой призмой. В противном случае она называется наклонной призмой. Прямая призма, основания которой являются правильными многогранниками, называется правильной призмой.



1.5. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту.

1.6. Иллюстрациялы материалдар: презентация

Закрепление новой темы. 25 мин

• Что такое призма?
• Какие бывают виды призм?
• Чему равна площадь боковой поверхности призмы?
• Прямоугольный параллелепипед и их свойства**.**

1.6. Приложение 1

1.7.Бақылау есептері: 30 мин

Пример: Площадь диагонального сечения куба равна - $16\sqrt{2}см^2$

А) Найдите длину ребра куба

Б) Найдите диагональ основания

В) Найдите диагональ куба

Г) Найдите площадь поверхности.

Подведение итогов занятия: 10 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания

Занятие №38

1.1. Тема урока: Цилиндр и его элементы. Конус и его элементы.
Количество часов: 3 часа. **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучающая: Ознакомить обучающихся с цилиндром и его элементами и научить формулам вычисления площади поверхности цилиндра.

• воспитательная: Формирование у обучающихся навыков достижения определенного результата.

1.3. Задача урока: развитие навыков применения полученных знаний по теме в специальностях.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочей среды урока

• определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

• Цилиндр и его элементы.

• Площадь поверхности цилиндра.

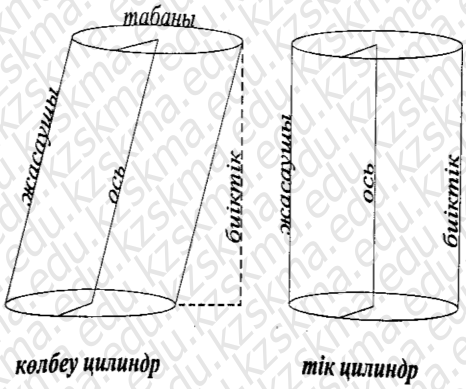
• Сечение цилиндра.

Объяснение нового урока 40мин:

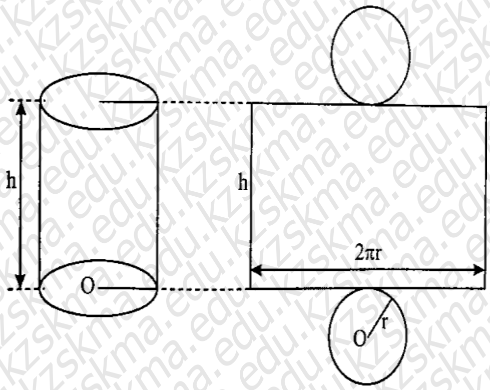
Цилиндр и его элементы. Площадь поверхности цилиндра. Использование цилиндра и его элементов в техническом технологическом процессе.

Любая ограниченная плоская область вместе с её границей при вращении вокруг оси, лежащей в той же плоскости, образует геометрическое тело. Такие тела называются телами вращения.

Цилиндр называется телом, образованным при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон.



көлбеу цилиндр **тік цилиндр**



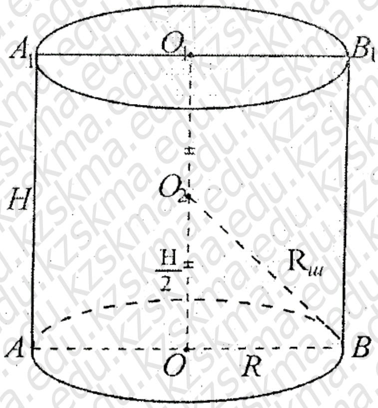
Цилиндром называют тело, которое получается при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон.

$$S_{б.б.} = 2\pi RH$$

Площадь полной поверхности: $S_{толык}$ □ 2□R□H □ R□□□□□□□□□

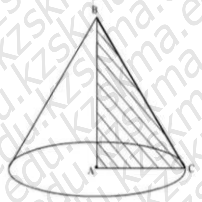
$S_{толык}$ □ $S_{б.б.}$ □ $2S_{табан}$

Элементы цилиндра:



OO1 - ось цилиндра;
AA1 = H – образующая цилиндра;
OA = R – радиус основания
AA1 B1 B – осевое сечение (прямоугольник)

Конус – айналу денесі



Определение: Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, от круга - основания конуса, от точки, не лежащей в плоскости этого круга - вершины конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности. Прямой круговой конус изображен на рисунке 5. S – высота конуса. Круг с центром O – основание конуса. SA и SB – образующие конуса. SO – ось прямого кругового конуса. Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. Основание высоты прямого конуса совпадает с центром его основания. Осью прямого кругового конуса называется его

Теорема 2. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по окружности, а боковую поверхность — по окружности, центр которой лежит на оси конуса. Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая его, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом.

Любую ограниченную плоскую область вместе с ее границей называют телом вращения, если она образуется при вращении вокруг оси в этой плоскости. Пусть в плоскости P дана кривая □ и какая-либо прямая L. Поверхность, получающаяся при вращении кривой □ вокруг прямой L, называется поверхностью вращения.

Площадь боковой поверхности конуса.

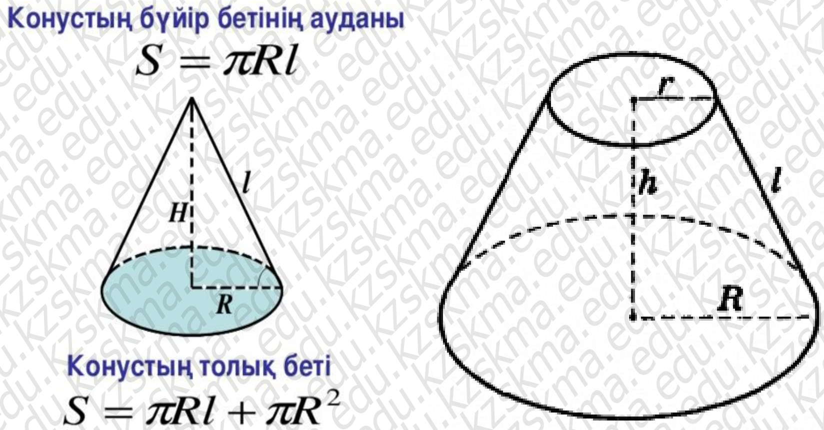
В конус вписываем правильную n-угольную пирамиду. (рис. 6). Площадь её боковой поверхности

$$S_n=\frac{1}{2}P_n l_n,$$

здесь Pn — периметр основания пирамиды, а ln — апофема. Когда n стремится к бесконечности, периметр основания Pn приближается к длине основания конуса C, а ln — к длине образующей l. В соответствии с этим, боковая поверхность пирамиды приближается к значению C l/2. В связи с этим, значение C l/2 используется для площади боковой поверхности конуса. Таким образом, площадь боковой поверхности конуса

$$S=\frac{1}{2}CH=\pi Rl,$$

Вычисляется по формуле, где R - радиус основания конуса, а l - длина образующей. Для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами R1, R2 и образующей l получается следующая формула. $S=\pi(R_1+R_2)l$.



Верхняя часть конуса, если она будет срезана параллельно основанию, образует фигуру, называемую усеченным конусом:

Площадь полной поверхности усеченного конуса вычисляется по следующей формуле: $S_{толык}=\pi(r+R)l+\pi R^2+\pi r^2=\pi(R^2+(R+r)l+r^2)$.

1. 5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 25 мин

- Какая фигура получается при вращении одной стороны прямоугольника?
- Какова форма осевого сечения прямого цилиндра?
- Как могут располагаться две плоскости, касательные к цилиндру?

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные работы: 30 мин

Пример: Площадь осевого сечения цилиндра равна 24 см 2 . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Пример: Диаметр основания цилиндра равен 10. Параллельно оси цилиндра, на расстоянии 3, проведено квадратное сечение. Найдите площадь данного сечения.

Пример: Из точки пересечения диагоналей осевого сечения цилиндра образующая видна под углом 600. Площадь основания равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Подведение итогов занятия: 10 мин

- Оценка знаний учащихся.
- Выдача домашнего задания

Занятие №39

1.1. Тема урока: Объем тел.

Количество часов: 3 часа **135 мин**

1.2. Цель урока:

- Обучение: Ознакомить обучающихся с общими свойствами объемов тел и научить решать задачи, используя формулы для нахождения объема.
- Воспитательная: Формировать навыки достижения определенного результата.

1.3. Задачи урока: развитие навыков применения полученных знаний по теме в профессиональной деятельности.

Организационный этап: 10 мин

- Организация рабочего пространства урока
- Определение целей и задач урока

Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

1.4. Основные вопросы темы:

- Общие сведения о объемах тел.
- Объем многогранников.
- Объем призмы.
- Объем пирамиды.
- Объем усеченной пирамиды.
- Решение задач с помощью формул объемов прямоугольного параллелепипеда, куба, призмы, пирамиды, усеченной пирамиды

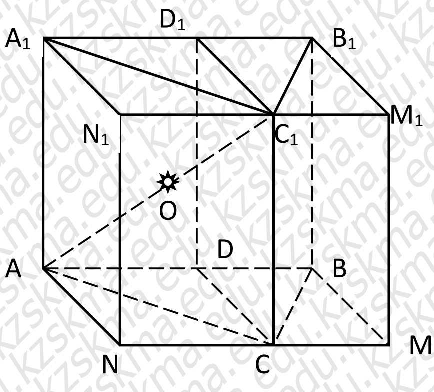
Общие свойства объемов тел. Объем многогранников. Объем призмы. Объем пирамиды. Объем усеченной пирамиды.

1. Объемы равных тел также равны.
2. Если тело разделить на несколько частей, то объем этого тела равен сумме объемов разделенных частей.
3. Объем куба с ребром, равным 1, равен 1.

Теорема: 1 Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, то есть V=a*b*c (1), где a, b, c – три измерения n.

Доказательство провести, глядя на рисунок 57 в литературе 1.

Теорема 2: Объем прямой параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, то есть , где Q - площадь основания, H - высота пирамиды:



Дано. ABCD A1B1C1D1 - прямоугольный параллелепипед, ABCD - параллелограмм.

Доказательство.

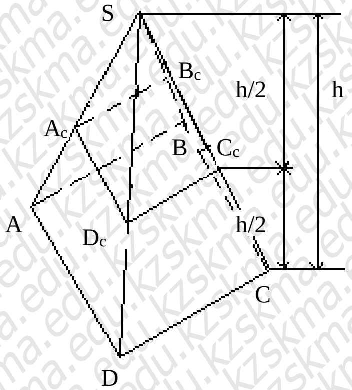
Проведем перпендикуляры AE⊥BC, DF⊥BC, проведем прямоугольный параллелепипед AEFA1E1F1D1. Этот параллелепипед равен по объему данному параллелепипеду, так как он является прямоугольной призмой AEBA1E1B1. Он конгруентен призме DFCD1F1C1, образованной по формуле V=SAEFD*H, где SAEFD — площадь прямоугольника AEFD, которая равна площади параллелограмма ABCD, то есть SAEFD=Q, поэтому формула доказана.

Теорема 3. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Объяснить доказательство теоремы, используя модели многогранников. Выполнить чертежи 66-65 по учебнику 1. Записать доказательство в тетрадь в виде краткого изложения. $V = S \cdot l = Q\cos\varphi \cdot \dfrac{H}{\cos\varphi} = QH$

Теорема 4. Любая трехгранная пирамида имеет объем, равный одной трети произведения площади основания и высоты

Дано: SABC - треугольная пирамида, S - вершина, ABC - основание.



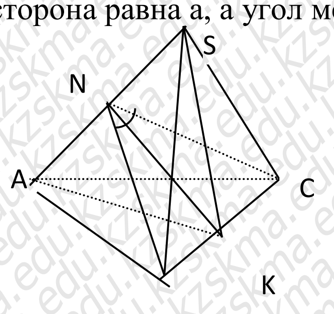
$V = \dfrac{1}{3}SH$

Доказательство. Площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию, является квадратичной функцией расстояния от плоскости сечения до вершины. Поэтому к пирамиде можно применить формулу Симпсона. $V = \dfrac{h}{6}(s_H + 4s_C + S_B)$ (1). S_H=S, S_B=0; По свойству параллельности пирамиды $\dfrac{S_C}{S} = \dfrac{(h/2)^2}{h^2} = \dfrac{1}{4}$, $S_C = \dfrac{1}{4}S$

Подставив эти значения в формулу (1), получаем следующее. $V = \dfrac{h}{6}(S + 4\cdot\dfrac{S}{4} + 0) = \dfrac{h}{6}\cdot 2S = \dfrac{1}{3}SH$

Теорема 5 Высота H, площади оснований Q и q, объем сложной пирамиды**:** $V = \dfrac{1}{3}H(q + Q + \sqrt{qQ})$ ***вычисляется по формулам***

Например: Объем правильной пирамиды с основанием в виде треугольника, у которого сторона равна а, а угол между боковыми сторонами равен 90°, необходимо найти.



ΔSABC - пирамида, ΔBNC - линейный угол двугранного угла при ребре AS.

ΔABC - правильный треугольник, поэтому SABC

|AB|=a, ⇒ |BK|=$\dfrac{a}{2}$,

$[AK[= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, для площади основания $Q = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - Берем образец. Найдите высоту пирамиды N=|SO|. Треугольники ACO и AHK прямые, имеют общий острый угол, поэтому они подобны. $\dfrac{|SO|}{|NK|} = \dfrac{|AC|}{|AK|}$, $|NK| = |BK| = \dfrac{a}{2}$, $\angle BNK = 45^0$;

$|AS| = \sqrt{|OS|^2 + |AO|^2} = \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{3}}$ и $H = \dfrac{1}{3}\sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{3}}$ $2H^2 = \dfrac{a^2}{3}$ $H = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$ Сонымен

$V = \dfrac{1}{3}QH = \dfrac{a^3}{12\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}a^3$

1.5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 25 мин

• Как определить объем правильной пирамиды по заданной записи?

• Какая формула объема призмы?
• Объемы подобных фигур?

1.6. Приложение 1

1.7. Контрольные задания: 30 мин

Пример-1. Дан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна 4 см и образует угол 450 с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.

Пример-2. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра равны 21,5 м.

Пример-3. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см. Все ее боковые ребра равны 7 см. Найдите объем пирамиды.

Подведение итогов занятия: 10 мин

• Оценка знаний учащихся.
• Выдача домашнего задания

Занятие №40

1.1. Тема урока: Объем вращающихся тел.

Количество часов: 3 часа **135 мин**

1.2. Цель урока:

• обучение: Ознакомить обучающихся с общими свойствами объемов вращающихся тел и научить решать задачи, используя формулы для нахождения их объемов.
• воспитание: Формировать у обучающихся навыки достижения определенного результата.

1.3. Задачи урока: развитие навыков применения полученных знаний по теме в профессиональной деятельности.

Организационный этап: 10 мин

• организация рабочего пространства урока
• определение целей и задач урока

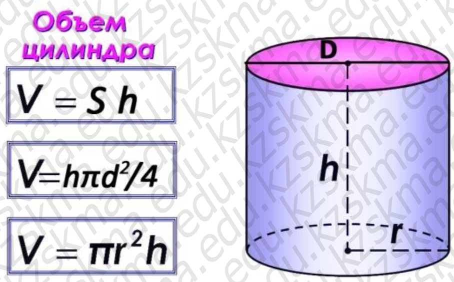
Проверка знаний обучающихся по пройденной теме: 20 мин

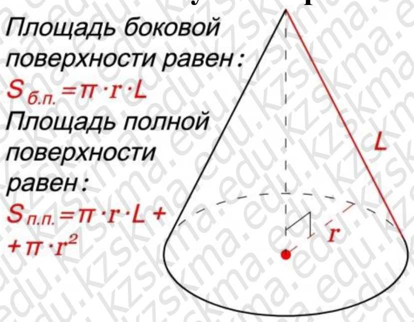
1.4. Основные вопросы темы:

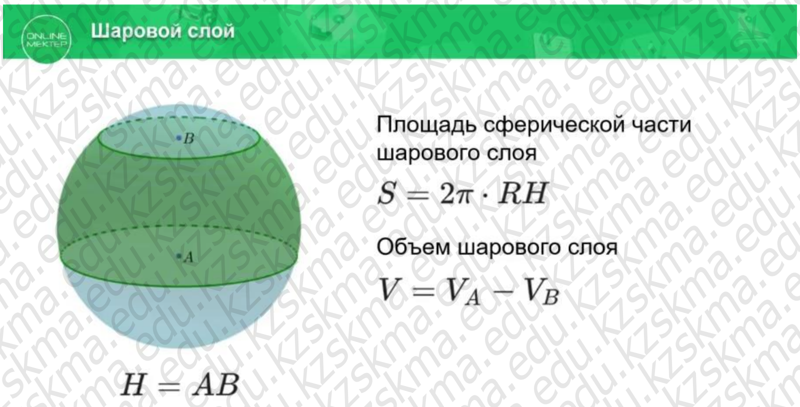
• применение операций с векторами.
• умножение вектора, заданного координатами, на число.
• система прямоугольных координат в пространстве.

Объяснение нового урока: 40 мин

Объем цилиндра. Объем конуса. Объем усеченного конуса. Шар и объем его частей.







1. 5. Иллюстративные материалы: работа с учебником.

Закрепление новой темы. 25 мин

• Что такое призма?
• Какие бывают виды призм?
• Чему равна площадь боковой поверхности призмы?
• Прямоугольный параллелепипед и его свойства**.**

1.6.Приложение 1

1.6.Литература:

Основная:

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. Аширбаева Н. Қ. Жоғары математика курсының негіздері : оқу құралы / Н. Қ. Аширбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 304 бет
3. Базарбекова А. А. Жоғары математика : оқулық / А. А. Базарбекова, А. Б. Базарбекова. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 368 бет
4. Корчевский В., Жұмағұлова З. Алгебра және анализ бастамалары. Есептер жинағы.- Издательство "Мектеп" 2019 (каз) 10-сынып.
5. Корчевский В., Жумагулова З.Алгебра и начала анализа. Сборник задач.- Издательство "Мектеп" 2019 (русс) 10- класс
6. Әбілқасымова А., Жұмағұлова З. Алгебра және анализ бастамалары. Оқулық. Издательство "Мектеп" 2019 10-сынып.
7. Абылкасымова А., Жумагулова З. Алгебра и начала анализа.Учебник..-Издательство "Мектеп" 2019 (русс) 10- класс
8. Әбілқасымова А., Жұмағұлова З. Алгебра және анализ бастамалары. Оқулық. Издательство "Мектеп" 2019 11-сынып.
9. Абылкасымова А., Жумагулова З. Алгебра и начала анализа.Учебник. Издательство "Мектеп" 2019 11-сынып.
10. Смирнов В.А., Тұяқов Е.А Геометрия. Оқулық Издательство "Мектеп" 2018 10-сынып.
11. Смирнов В.А., Тұяқов Е.А Геометрия.Учебник Издательство "Мектеп" 2018 10-класс

Дополнительная :

1. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с.

Электронные издания

1. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С. Қыдырбаева Математика: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б. **https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/**
2. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева,
3. А.С. Қыдырбаева Математика: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020 ж. 144 б **https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/**
4. МАТЕМАТИКА-I. СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ СРС ДЛЯ УЧАЩИХСЯ КОЛЛЕДЖА II-КУРСА. Сыдыкова Д.К., Калыбекова Ж.А., Сеитова А.А. , 2018 **https://aknurpress.kz/reader/web/1926**
5. МАТЕМАТИКА – I: II-КУРС СТУДЕНТТЕРІНЕ АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ Сыдыкова Д.К., Калыбекова Ж.А., Сеитова А.А. , 2018 **https://aknurpress.kz/reader/web/1925**
6. МАТЕМАТИКА 1 Кощанова Г.Р., Кулжагарова. Б. Т. , 2019 **https://aknurpress.kz/reader/web/2080**
7. МАТЕМАТИКА 2 Кулжагарова Б.Т., Кощанова Г.Р. , 2019 **https://aknurpress.kz/reader/web/2081**
8. Абдиманапова, П.Б. Математика: Оқу құралы. / ҚР Білім және ғылым министрлігі, Алматы технологиялық университеті. - Алматы: АТУ, 2019. - 174б. **http://rmebrk.kz/book/1172143**
9. Роговой, А.В. Математика: Учебное пособие - Шымкент: Университет "Мирас", 2019. **http://rmebrk.kz/book/1171159**
10. Нұрмағанбетова Г.С., Нұрмағанбетова Ж.С., Нұрмағамбетова Г.С. Динамикалық жүйелерді математикалық модельдеу. Оқу құралы. Қарағанды: «Medet Group» ЖШС, 2021. - 74 бет. **https://www.aknurpress.kz/reader/web/3080**

1.7. Контрольные работы: 30 мин

Пример: Высота цилиндра 2 м, радиус основания 3 см. Найдите объем.

Пример: Высота конуса 15 см, а объем 320 см3. Найдите радиус основания.

Пример: Объем конуса 375 см3. Высота 5 см. Плоскость проходит на расстоянии 2 см от вершины конуса и параллельна его основанию. Найдите объем образовавшегося усеченного конуса.

Пример: Радиус окружности в основании шарового сектора равен см, а радиус шара равен 3 см. Найдите объем шарового сектора.

Подведение итогов занятия: 10 мин

• Оценка знаний учащихся.

• Выдача домашнего задания